灰色缓冲算子理论及其应用

吴正朋 周宗福 刘思峰 著

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
安徽大学出版社

责任编辑　赵小文
装帧设计　朗　意

ISBN 978-7-81110-826-2
定价　18.00元

灰色缓冲算子理论及其应用

◎ 吴正朋 周宗福 刘思峰 著

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
安徽大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

灰色缓冲算子理论及其应用/吴正朋等著. —合肥：安徽大学出版社，2010.8
ISBN 978-7-81110-826-2

Ⅰ.①灰… Ⅱ.①吴… Ⅲ.①算子—研究 Ⅳ.①O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 164864 号

灰色缓冲算子理论及其应用 吴正朋 周宗福 刘思峰 著

出版发行：北京师范大学出版集团
安徽大学出版社
(安徽省合肥市肥西路 3 号 邮编 230039)
www.bnupg.com.cn
www.ahupress.com.cn
印 刷：中国科学技术大学印刷厂
经 销：全国新华书店
开 本：169mm×228mm
印 张：7.75
字 数：139 千字
版 次：2010 年 9 月第 1 版
印 次：2010 年 9 月第 1 次印刷
定 价：18.00 元
ISBN 978-7-81110-826-2

责任编辑：赵小文 **装帧设计**：朗 意 **责任印制**：陈 如 韩 琳

前　言

灰色系统的特色是研究“小样本”与“贫信息”等不确定性问题，因此通过充分开发、利用已占有的信息来挖掘系统本身固有的规律是灰色系统理论的基本准则. 我们可以通过社会、经济、生态等系统的行为特征数据来寻求因素之间或自身的变化规律. 灰色系统理论认为，尽管客观系统的表象复杂、数据离乱，但它们总有自身的整体功能，必然蕴含着某种规律，关键是如何选择适当的方法来挖掘和利用. 刘思峰教授提出了冲击扰动缓冲算子的概念，并构造出了一种较为广泛使用的缓冲算子. 一些学者在此基础上对弱化缓冲算子和强化缓冲算子进行了扩展研究. 本书在此基础上，结合反向累积法、单调函数与新信息优先的相关知识，构造了新的缓冲算子，从而推广了缓冲算子的类型，并能更有效地提高建模预测过程中的精度. 全书主要涉及以下几个方面的内容：

(1)在灰色系统理论缓冲算子公理体系下，利用反向累积和的概念，构造了一类新的强(弱)化缓冲算子，讨论了其相互关系及其性质. 并通过算例验证了该算子序列的有效性和实用性，为冲击扰动系统在建模预测过程中出现的定量预测结果与定性分析结论不符的问

题提供了解决的方法.

(2)利用单调函数定理及新信息优先原则,构造了新的弱(强)化缓冲算子,从而大大地拓展了弱(强)化缓冲算子的应用范围.对序列前一部分增长(衰减)速度过慢(快),而后一部分增长(衰减)速度过快(慢)的冲击扰动系统数据序列在建模预测过程中常常出现的定量预测结果与定性分析结论不符的问题,提供了多种解决方案.首次将缓冲算子的构造与函数联系起来,从而为缓冲算子的构造开辟了新方向.

(3)在灰色系统缓冲算子公理体系下,证明了下列结论:若 d 是由 $x(1),\cdots,x(n)$ 所构成的表达式, f 为严格单调递增(减)函数, g 为 f 的反函数.在 d 中,将 $f(x(k))$ 替换 $x(k)(k=1,\cdots,n)$,对得到的新表达式,用函数 g 去作用,最后的表达式记为 e ,若 d 为强化(弱化)缓冲算子,则 e 也为强化(弱化)缓冲算子.

(4)灰色问题中的背景值的构造和灰色 GM(1,1)模型病态问题一直是灰色系统研究中的两个重要问题.利用连分式与矩阵条件数理论,对这两个问题进行了讨论,获得了一些重要结论.

本书仓促之间不免有错误和不妥之处,恳请专家、学者和同仁多加批评指正.

著　者

2010 年 5 月

目 录

第 1 章 绪 论

1.1 研究背景及研究意义

社会、经济、农业、工业、生态等许多系统，都是根据研究对象所属的领域和范围命名的，而灰色系统却是按颜色命名的. 在控制论中，人们通常用颜色的深浅来形容信息的明确程度. 如艾什比将内部信息未知的对象称为“黑箱”. 再如在政治生活中，人民群众希望了解决策及其形成过程的有关信息，就提出要增加透明度. 我们用“黑”表示信息未知，用“白”表示信息已知，用“灰”表示部分信息未知、部分信息已知. 相应的，信息完全明确的系统称为“白色系统”，信息完全未知的系统称为“黑色系统”. 部分信息未知、部分信息已知的系统称为“灰色系统”. 在灰色系统理论创立与发展过程中，邓聚龙教授发现并提炼出灰色系统的基本原理. 读者不难看出，这些基本原理，具有十分深刻的哲学内涵.

公理 1.1 (*差异信息原理*) 差异即信息，凡信息必有差异.

公理 1.2 (*解的非唯一性原理*) 信息不完全、不确定的解是非唯一的.

公理 1.3 (*最少信息原理*) 灰色系统的特点是充分开发、利用已占有的最少信息.

公理 1.4（认知根据原理） 信息是认知的根据.

公理 1.5（新信息优先原理） 新信息对认知的作用大于老信息.

公理 1.6（灰性不灭原理） 信息不完全是绝对的.

在灰色系统理论中，由于冲击扰动系统的大量存在，导致了定量预测结果与人们直观的定性分析结论大相径庭的现象经常发生. 问题的症结不在于模型的优劣，而是由于系统数据因系统本身受到某种冲击波的干扰而失真，因此寻求定量预测与定性分析的耦合点是摆在每一位预测工作者面前的一个首要问题.

灰色系统理论的主要任务之一就是根据社会、经济、生态等系统的行为特征，寻求不同系统变量之间或系统变量自身的数学关系和变化规律，其特色是研究“小样本”与“贫信息”等不确定性问题，其中的“新信息优先原理”是灰色系统理论的信息观，即认为新信息对认知的作用大于老信息，赋予新信息较大的权重可以提高灰色建模、灰色预测、灰色决策等的功效，其中的方法体系——灰色序列生成，是指通过信息覆盖，选择适当的方法对原始数据进行挖掘、整理以寻求系统变化规律的技术.

刘思峰教授等提出了冲击扰动缓冲算子的概念，构造出了一种较为广泛使用的缓冲算子并研究了已有算子的关系及特性，即当原始数据序列的前半部分增长（减缓）速度较快（慢），后半部分增长（减缓）速度较慢（快）时，先用弱（强）化缓冲算子作用于原始数据序列，然后利用 GM(1,1) 模型进行预测，可以有效地消除在建模预测过程中的干扰.

1.2 基本概念

定义 1.1 设系统真实序列为

$$X^{(0)}=(x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n)),$$

而观测到的系统数据序列为

$$\begin{aligned} X &= (x(1), x(2), \cdots, x(n)) \\ &= (x^{(0)}(1)+\varepsilon_1, x^{(0)}(2)+\varepsilon_2, \cdots, x^{(0)}(n)+\varepsilon_n) \\ &= X^{(0)}+\varepsilon. \end{aligned}$$

其中 $\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)$ 称为冲击扰动项，X 称为冲击扰动序列.

一般情况下，社会、经济等冲击扰动序列的数据序列均为按时间顺序记录的数据序列，最后一项数据 $x(n)$ 称为系统的新信息.

定义 1.2[1] 设系统数据序列为 $X=(x(1),x(2),\cdots,x(n))$，称

$$\begin{aligned} &\sum_{t=1}^{n}{}^{(1)}x(t)=\sum_{t=1}^{n}x(t), \\ &\sum_{t=1}^{n}{}^{(2)}x(t)=\sum_{t=1}^{n}\sum_{t'=t}^{n}x(t')=\sum_{t=1}^{n}tx(t), \\ &\sum_{t=1}^{n}{}^{(l)}x(t)=\sum_{t=1}^{n}\sum_{t'=t}^{n}{}^{(l-1)}x(t') \\ &\qquad =\frac{1}{(l-1)!}\sum_{t=1}^{n}t(t+1)\cdots(t+k-2)x(t), \end{aligned}$$

分别为 1 阶，2 阶，…，l 阶反向累积和算子.

当 $x(1)=x(2)=\cdots=x(n)=1$ 时，有

$$\sum_{t=1}^{n}{}^{(l)}1=\frac{1}{l!}n(n+1)\cdots(n+k-1).$$

定义 1.3 设系统数据序列为 $X=(x(1),x(2),\cdots,x(n))$，若

(1) $\forall k=2,3,\cdots,n$，$x(k)-x(k-1)>0$，则称 X 为单调增长序列.

(2) $\forall k=2,3,\cdots,n$，$x(k)-x(k-1)<0$，则称 X 为单调衰减序列.

(3) $\exists k_1,k_2\in\{2,3,\cdots,n\}$，使得

$$x(k_1)-x(k_1-1)>0, x(k_2)-x(k_2-1)<0,$$

则称 X 为振荡序列.

其中若令 $M=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}x(k)$，$m=\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}x(k)$，则称 $M-m$ 为振荡序列 X 的振幅.

定义 1.4 设 X 为系统数据序列，D 为作用于 X 的算子，X 经算子 D 作用后所得到序列记为 $XD=(x(1)d,x(2)d,\cdots,x(n)d)$，则称 D 为序列算子.

对序列连续作用，可得二阶算子，一直可以作用到 r 阶算子，分别记为 $XD^2,\cdots,XD^r$.

公理 1.7(不动点公理) 设 X 为系统数据序列，D 为序列算子，则有

$$x(n)d=x(n).$$

公理 1.8(信息充分利用公理) 系统数据序列 X 中的每一个数据 $x(k)$ $(k=1,2,\cdots,n)$，都应充分地参与算子作用的整个过程.

公理 1.9(解析化与规范化公理) 任意的 $x(k)d(k=1,2,\cdots,n)$ 皆可以由一个统一的 $x(1),x(2),\cdots,x(n)$ 的初等表达式表达.

满足上述三公理的序列算子称为缓冲算子，XD 称为缓冲序列.

说明：公理 1.7、1.8、1.9 在下文中简称为缓冲算子的公理一、二、三.

定义 1.5 设 X 为系统数据序列，D 为序列算子，当 X 为单调增长序列、单调衰减序列或振荡序列时，若缓冲序列 XD 比数据序列 X 的增长速度(或衰减速度)增强(减弱)或振幅减小(增大)，则称缓冲算子 D 为弱(强)化算子.

定理 1.1 设 X 为单调增长序列，XD 为缓冲序列，则

(1)D 为弱化缓冲算子$\Leftrightarrow x(k)\leqslant x(k)d,k=1,2,\cdots,n$；

(2)D 为强化缓冲算子$\Leftrightarrow x(k)\geqslant x(k)d,k=1,2,\cdots,n$.

证明：设

$$r(k)=\frac{x(n)-x(k)}{n-k+1},k=1,2,\cdots,n,$$

为原始序列 X 中 $x(k)$ 到 $x(n)$ 的平均增长率，

$$r(k)d=\frac{x(n)d-x(k)d}{n-k+1},k=1,2,\cdots,n,$$

为缓冲序列 XD 中 $x(k)d$ 到 $x(n)d$ 的平均增长率. 由 $x(n)d=x(n)$，得

$$r(k)-r(k)d=\frac{x(n)-x(k)}{n-k+1}-\frac{x(n)d-x(k)d}{n-k+1}=\frac{x(k)d-x(k)}{n-k+1}.$$

若 D 为弱化缓冲算子，则 $r(k)\geqslant r(k)d$，即 $r(k)-r(k)d\geqslant 0$，于是 $x(k)-$

$x(k)d \leqslant 0$，即 $x(k) \leqslant x(k)d$，反之亦然.

若 D 为强化缓冲算子，则 $x(k) \leqslant x(k)d$，即 $x(k) - x(k)d \leqslant 0$，于是 $x(k) - x(k)d \geqslant 0$，即 $x(k) \geqslant x(k)d$，反之亦然.

定理 1.2 设 X 为单调衰减序列，XD 为缓冲序列，则

(1) D 为弱化缓冲算子 $\Leftrightarrow x(k) \geqslant x(k)d, k=1,2,\cdots,n$；

(2) D 为强化缓冲算子 $\Leftrightarrow x(k) \leqslant x(k)d, k=1,2,\cdots,n$.

证明：与定理 1.1 类似，从略.

定理 1.3 设 X 为振荡序列，XD 为缓冲序列.

(1) 若 D 为弱化缓冲算子，则

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n} x(k) \geqslant \max_{1\leqslant k\leqslant n}\{x(k)d\}, \min_{1\leqslant k\leqslant n} x(k) \leqslant \min_{1\leqslant k\leqslant n}\{x(k)d\};$$

(2) 若 D 为强化缓冲算子，则

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n} x(k) \leqslant \max_{1\leqslant k\leqslant n}\{x(k)d\}, \min_{1\leqslant k\leqslant n} x(k) \geqslant \min_{1\leqslant k\leqslant n}\{x(k)d\}.$$

由定理 1.1～1.3 可知，单调增长序列在弱(强)化缓冲算子作用下，数据膨胀(萎缩)；单调衰减序列在弱(强)化缓冲算子作用下，数据萎缩(膨胀).

1.3 实用缓冲算子的构造

定理 1.4 设原始数据序列 $X=(x(1),x(2),\cdots,x(n))$，令

$$XD=(x(1)d,x(2)d,\cdots,x(n)d),$$

其中

$$x(k)d=\frac{x(k)+\cdots+x(n)}{n-k+1}, k=1,2,\cdots,n,$$

则当 X 为单调增长序列、单调衰减序列或振荡序列时，D 皆为弱化缓冲算子.

证明：直接利用 $x(k)d$ 的定义，易知定理成立.

定理 1.5 设原始数据序列 $X=(x(1),x(2),\cdots,x(n))$，令

$$XD=(x(1)d,x(2)d,\cdots,x(n)d),$$

其中

$$x(k)d = \frac{kx(k) + \cdots + nx(n)}{k + \cdots + n}, k = 1,2,\cdots,n,$$

则当 X 为单调增长序列、单调衰减序列或振荡序列时，D 皆为弱化缓冲算子.

证明:不妨设 $x(k)$ 为单调增长序列，则

$$x(k)d - x(k) = \frac{kx(k) + \cdots + nx(n)}{k + \cdots + n} - x(k)$$

$$= \frac{(k+1)[x(k+1) - x(k)] + \cdots + n[x(n) - x(k)]}{k + \cdots + n} \geqslant 0.$$

因此，

$$x(k) \leqslant x(k)d.$$

所以 D 为弱化缓冲算子.

同理可证，当 X 为单调衰减序列或振荡序列时，D 为弱化缓冲算子.

定理 1.6 设原始数据序列 $X = (x(1), x(2), \cdots, x(n))$，令

$$XD = (x(1)d, x(2)d, \cdots, x(n)d),$$

其中

$$x(k)d = \frac{w_k x(k) + \cdots + w_n x(n)}{w_k + \cdots + w_n}, k = 1,2,\cdots,n,$$

则当 X 为单调增长序列、单调衰减序列或振荡序列时，D 皆为弱化缓冲算子.

证明:不妨设 $x(k)$ 为单调增长序列，则

$$x(k)d - x(k) = \frac{w_k x(k) + \cdots + w_n x(n)}{w_k + \cdots + w_n} - x(k)$$

$$= \frac{w_{(k+1)}[x(k+1) - x(k)] + \cdots + w_n[x(n) - x(k)]}{w_k + \cdots + w_n} \geqslant 0.$$

因此，

$$x(k) \leqslant x(k)d.$$

所以 D 为弱化缓冲算子.

同理可证，当 X 为单调衰减序列或振荡序列时，D 为弱化缓冲算子.

定理 1.7 设原始数据序列 $X - (x(1), x(2), \cdots, x(n))$，令

$$XD = (x(1)d, x(2)d, \cdots, x(n)d),$$

其中

$$x(k)d=[x(k)^{w_k}\cdot\cdots\cdot x(n)^{w_n}]^{\frac{1}{w_k+\cdots+w_n}},k=1,2,\cdots,n,$$

则当 X 为单调增长序列、单调衰减序列或振荡序列时，D 皆为弱化缓冲算子.

证明:不妨设 $x(k)$ 为单调增长序列,则

$$\begin{aligned}x(k)d&=[x^{w_k}(k)\times\cdots\times x^{w_n}(n)]^{\frac{1}{w_k+\cdots+w_n}}\\&\geqslant[x^{w_k}(k)\times\cdots\times x^{w_n}(k)]^{\frac{1}{w_k+\cdots+w_n}}=x(k).\end{aligned}$$

因此,

$$x(k)\leqslant x(k)d.$$

所以 D 为弱化算子.

同理可证,当 X 为单调衰减序列或振荡序列时，D 为弱化缓冲算子.

定理 1.8 设原始数据序列 $X=(x(1),x(2),\cdots,x(n))$，令

$$XD=(x(1)d,x(2)d,\cdots,x(n)d),$$

其中

$$x(k)d=\frac{x(k)}{x(n)}\cdot x(k),k=1,\cdots,n,$$

则当 X 为单调增长序列、单调衰减序列或振荡序列时，D 皆为强化缓冲算子.

证明:不妨设 $x(k)$ 为单调增长序列,则

$$\begin{aligned}x(k)d-x(k)&=\frac{x(k)}{x(n)}\cdot x(k)-x(k)\\&=\frac{x(k)}{x(n)}(x(k)-x(n))\leqslant 0.\end{aligned}$$

因此,

$$x(k)\geqslant x(k)d.$$

所以 D 为强化缓冲算子.

同理可证,当 X 为单调衰减序列或振荡序列时，D 为强化缓冲算子.

定理 1.9 设原始数据序列 $X=(x(1),x(2),\cdots,x(n))$，令

$$XD=(x(1)d,x(2)d,\cdots,x(n)d),$$

其中

$$x(k)d = \frac{(w_k + \cdots + w_n)x^2(k)}{w_k x(k) + \cdots + w_n x(n)}, k = 1,2,\cdots,n,$$

则当 X 为单调增长序列、单调衰减序列或振荡序列时，D 皆为强化缓冲算子.

证明：不妨设 $x(k)$ 为单调增长序列，则

$$x(k)d = \frac{(w_k + \cdots + w_n)x^2(k)}{w_k x(k) + \cdots + w_n x(n)}$$

$$\leqslant \frac{(w_k + \cdots + w_n)x^2(k)}{w_k x(k) + \cdots + w_n x(k)} = x(k).$$

因此，

$$x(k) \geqslant x(k)d.$$

所以 D 为强化缓冲算子.

同理可证，当 X 为单调衰减序列或振荡序列时，D 为强化缓冲算子.

定理 1.10 设原始数据序列 $X = (x(1), x(2), \cdots, x(n))$，令

$$XD = (x(1)d, x(2)d, \cdots, x(n)d),$$

其中

$$x(k)d = \frac{x^2(k)}{[x(k)^{w_k} \cdot \cdots \cdot x(n)^{w_n}]^{\frac{1}{w_k + \cdots + w_n}}}, k = 1,2,\cdots,n,$$

则当 X 为单调增长序列、单调衰减序列或振荡序列时，D 皆为强化缓冲算子.

证明：设 $x(k)$ 为单调增长序列，则

$$x(k)d = \frac{x^2(k)}{[x(k)^{w_k} \cdot \cdots \cdot x(n)^{w_n}]^{\frac{1}{w_k + \cdots + w_n}}}$$

$$\leqslant \frac{x^2(k)}{[x(k)^{w_k} \cdot \cdots \cdot x(k)^{w_n}]^{\frac{1}{w_k + \cdots + w_n}}} = x(k).$$

因此，

$$x(k) \geqslant x(k)d.$$

所以 D 为强化缓冲算子.

同理可证，当 X 为单调衰减序列或振荡序列时，D 为强化缓冲算子.

1.4 灰色 GM(1,1)模型

定义 1.6 设

$$X^{(0)}=(x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n)),$$
$$X^{(1)}=(x^{(1)}(1),x^{(1)}(2),\cdots,x^{(1)}(n)),$$
$$x^{(1)}(k)=\sum_{i=1}^{k}x^{(0)}(i),$$

则称

$$x^{(0)}(k)+ax^{(1)}(k)=b$$

为 GM(1,1)模型的原始形式.

定义 1.7 设

$$X^{(0)}=(x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n)),$$
$$X^{(1)}=(x^{(1)}(1),x^{(1)}(2),\cdots,x^{(1)}(n)),$$
$$x^{(1)}(k)=\sum_{i=1}^{k}x^{(0)}(i);$$
$$Z^{(1)}=(z^{(1)}(1),z^{(1)}(2),\cdots,z^{(1)}(n)),$$
$$z^{(1)}(k)=\frac{1}{2}(x^{(1)}(k-1)+x^{(1)}(k)),$$

则称

$$x^{(0)}(k)+az^{(1)}(k)=b$$

为 GM(1,1)模型的基本形式.

定理 1.11 设 $X^{(0)}$ 为非负序列,

$$X^{(0)}=(x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n)),$$
$$X^{(1)}=(x^{(1)}(1),x^{(1)}(2),\cdots,x^{(1)}(n)),$$
$$x^{(1)}(k)=\sum_{i=1}^{k}x^{(0)}(i);$$

$$Z^{(1)}=(z^{(1)}(1),z^{(1)}(2),\cdots,z^{(1)}(n)),$$

$$z^{(1)}(k)=\frac{1}{2}(x^{(1)}(k-1)+x^{(1)}(k)),k=2,\cdots,n,$$

若 $\hat{a}=(a,b)^T$ 为参数列，且

$$Y=(x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n))^T,$$

$$B=\begin{bmatrix}-z^{(1)}(2) & 1\\ \vdots & \vdots\\ -z^{(1)}(n) & 1\end{bmatrix}.$$

则 GM(1,1)模型 $x^{(0)}(k)+az^{(1)}(k)=b$ 的最小二乘估计参数列满足

$$\hat{a}=(B^TB)^{-1}B^TY.$$

定义 1.8 设

$$X^{(0)}=(x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n)),$$

$$X^{(1)}=(x^{(1)}(1),x^{(1)}(2),\cdots,x^{(1)}(n)),$$

$$x^{(1)}(k)=\sum_{i=1}^{k}x^{(0)}(i);$$

$$Z^{(1)}=(z^{(1)}(1),z^{(1)}(2),\cdots,z^{(1)}(n)),$$

$$z^{(1)}(k)=\frac{1}{2}(x^{(1)}(k-1)+x^{(1)}(k)),$$

则称

$$\frac{\mathrm{d}x^{(1)}}{\mathrm{d}t}+ax^{(1)}=b$$

为 GM(1,1)模型

$$x^{(0)}(k)+az^{(1)}(k)=b$$

的白化方程，也叫影子方程.

定义 1.9 设原始序列为

$$X^{(0)}=(x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n)),$$

相应的预测模型的模拟序列为

$$X_1^{(0)}=(x_1^{(0)}(1),x_1^{(0)}(2),\cdots,x_1^{(0)}(n)),$$

残差序列为

$$\begin{aligned}\varepsilon^{(0)} &= (\varepsilon(1),\cdots,\varepsilon(n)) \\ &= (x^{(0)}(1)-x_1^{(0)}(1),\cdots,x^{(0)}(n)-x_1^{(0)}(n)),\end{aligned}$$

相对误差序列为

$$\Delta=\left(\left|\frac{\varepsilon(1)}{x^{(0)}(1)}\right|,\cdots,\left|\frac{\varepsilon(n)}{x^{(0)}(n)}\right|\right)=\{\Delta_k\}_1^n,$$

则对于 $k\leqslant n$，称 $\Delta_k=\left|\frac{\varepsilon(k)}{x^{(0)}(k)}\right|$ 为 k 点的模拟相对误差，称

$$\widehat{\Delta}=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n}\Delta_i.$$

为平均相对误差.

定义 1.10 设 $X^{(0)}=(x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n))$ 为原始序列，$\widetilde{X}^{(0)}$ 为相应的模拟序列，$\varepsilon^{(0)}$ 为残差序列，则

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x^{(0)}(k),S_1^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x^{(0)}(k)-\bar{x})^2$$

分别为 $X^{(0)}$ 的均值、方差；

$$\bar{\varepsilon}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varepsilon(k),S_2^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\varepsilon(k)-\bar{\varepsilon})^2$$

分别为残差的均值、方差；

$$C=\frac{S_2}{S_1},p=p(|\varepsilon(k)-\bar{\varepsilon}|<0.6745S_1)$$

分别为均方差比值与小误差概率.

第 2 章

基于反向累积法的弱化缓冲算子理论研究

2.1 弱化缓冲算子序列

刘思峰、党耀国等教授在其专著《灰色系统理论及其应用》中构造了下列强化缓冲算子.设 $X = (x(1), x(2), \cdots, x(n))$ 为系统数据序列,令

$$XD_i = (x(1)d_i, x(2)d_i, \cdots, x(n)d_i), i = 1, 2,$$

其中

$$x(k)d_1 = \frac{x(k) + \cdots + x(n)}{n - k + 1},$$

$$x(k)d_2 = \frac{kx(k) + \cdots + nx(n)}{k + \cdots + n}, k = 1, 2, \cdots, n,$$

则当 X 为单调增长序列、单调衰减序列或振荡序列时, D_1 、D_2 皆为弱化缓冲算子.

在此,我们称 D_1 、D_2 为平均弱化缓冲算子,并利用反向累积法,构建新的弱化缓冲算子.

定理 2.1　设 $X=(x(1),x(2),\cdots,x(n))$ 为系统数据序列，令

$$XD_l=(x(1)d_l,\cdots,x(n)d_l),$$

其中

$$x(k)d_l=\frac{\frac{1}{(l-1)!}[n\cdots(n+l-2)x(n)+\cdots+k(k+1)\cdots(k+l-2)x(k)]}{\frac{1}{(l-1)!}[n\cdots(n+l-2)+\cdots+k(k+1)\cdots(k+l-2)]},$$

$$k=1,2,\cdots,n,$$

则当 X 为单调增长序列、单调衰减序列或震荡序列时，D_l $(l=1,2,3,4,\cdots)$ 为 l 阶反向累积和算术平均弱化缓冲算子(l—BCASBO)，其中

$$\frac{1}{(l-1)!}[n\cdots(n+l-2)+\cdots+k\cdots(k+l-2)]$$

$$=\frac{1}{l!}[n\cdots(n+l-1)-(k-1)\cdots(k+l-2)].$$

证明：容易验证，算子序列 $\{D_l,l=1,2,3,\cdots\}$ 满足缓冲算子的三个公理，因而 D_l 为缓冲算子.

(1)当 X 为单调增长序列时，即

$$x(k)\leqslant x(k+1)\leqslant\cdots\leqslant x(n),$$

所以

$x(k)d_l-x(k)$

$$=\frac{\frac{1}{(l-1)!}\{n\cdots(n+l-2)[x(n)-x(k)]+\cdots+(k+1)\cdots(k+l-1)[x(k+1)-x(k)]\}}{\frac{1}{(l-1)!}[n\cdots(n+l-2)+\cdots+k\cdots(k+l-2)]}$$

$\geqslant 0$,

即

$$x(k)d_l\geqslant x(k),$$

所以 D_l 为弱化缓冲算子.

(2)当 X 为单调衰减序列时，即

$$x(k)\geqslant x(k+1)\geqslant\cdots\geqslant x(n),$$

所以

$$x(k)d_l - x(k) = \frac{\frac{1}{(l-1)!}\{n\cdots(n+l-2)[x(n)-x(k)]+\cdots+(k+1)\cdots(k+l-1)[x(k+1)-x(k)]\}}{\frac{1}{(l-1)!}[n\cdots(n+l-2)+\cdots+k(k+1)\cdots(k+l-2)]}$$

$\leqslant 0$,

即

$$x(k)d_l \leqslant x(k),$$

所以 D_l 为弱化缓冲算子.

(3)当 X 为振荡序列时,令

$$x(k) = \max_{1\leqslant i\leqslant n} x(i), x(h) = \min_{1\leqslant i\leqslant n} x(i).$$

对 $\forall s \in \{1,2,\cdots,n\}$, 有

$$x(k) \geqslant x(s),\cdots,x(n),$$
$$x(h) \leqslant x(s),\cdots,x(n),$$

则

$$x(s)d_l - x(k) = \frac{\frac{1}{(l-1)!}\{n\cdots(n+l-2)[x(n)-x(k)]+\cdots+s(s+1)\cdots(s+l-2)[x(s)-x(k)]\}}{\frac{1}{(l-1)!}[n\cdots(n+l-2)+\cdots+s(s+1)\cdots(s+l-2)]}$$

$\leqslant 0$;

$$x(s)d_l - x(h) = \frac{\frac{1}{(l-1)!}\{n\cdots(n+l-2)[x(n)-x(h)]+\cdots+s(s+1)\cdots(s+l-2)[x(s)-x(h)]\}}{\frac{1}{(l-1)!}[n\cdots(n+l-2)+\cdots+s(s+1)\cdots(s+l-2)]}$$

$\geqslant 0$,

即,对 $\forall s \in \{1,2,\cdots,n\}$, 有

$$x(s)d_l \leqslant x(k) = \max_{1\leqslant i\leqslant n} x(i),$$

$$x(s)d_l \geqslant x(h) = \min_{1\leqslant i\leqslant n} x(i),$$
$$\max_{1\leqslant i\leqslant n} x(i)d_l \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} x(i),$$
$$\min_{1\leqslant i\leqslant n} x(i)d_l \geqslant \min_{1\leqslant i\leqslant n} x(i).$$

所以 D_l 为弱化缓冲算子.

综上可得，$\{D_l, l=1,2,3,\cdots\}$ 为弱化缓冲算子序列.

当 $l=1$ 时，即为简单算术平均弱化缓冲算子

$$x(k)d_1 = \frac{x(k)+\cdots+x(n)}{n-k+1};$$

当 $l=2$ 时，即为加权算术平均弱化缓冲算子

$$x(k)d_2 = \frac{kx(k)+\cdots+nx(n)}{k+\cdots+n}.$$

同理，可以考虑三阶以及更高阶反向累积和算术平均弱化缓冲算子.

定理 2.2　设 $X=(x(1),x(2),\cdots,x(n))$ 为非负系统数据序列，令

$$XE_l = (x(1)e_l,\cdots,x(n)e_l),$$

其中

$$x(k)e_l = \left[x(n)^{n\cdots(n+l-2)} \times \cdots \times x(k)^{k\cdots(k+l-2)}\right]^{\frac{1}{n\cdots(n+l-2)+\cdots+k\cdots(k+l-2)}}, k=1,2,\cdots,n,$$

则当 X 为单调增长序列、单调衰减序列或振荡序列时，E_l $(l=1,2,3,4,\cdots)$ 为 l 阶反向累积和几何平均弱化缓冲算子(l－BCGASBO).

证明：容易验证，算子序列 $\{E_l, l=1,2,3,\cdots\}$ 满足缓冲算子的三个公理，因而 E_l 为缓冲算子.

(1)当 X 为单调增长序列时，即

$$0 < x(k) \leqslant x(k+1) \leqslant \cdots \leqslant x(n),$$

得

$$\frac{x(k)e_l}{x(k)} = \left[\left(\frac{x(n)}{x(k)}\right)^{n\cdots(n+l-2)} \times \cdots \times \left(\frac{x(k)}{x(k)}\right)^{k\cdots(k+l-2)}\right]^{\frac{1}{n\cdots(n+l-2)+\cdots+k\cdots(k+l-2)}} \geqslant 1,$$

即

$$x(k)e_l \geqslant x(k),$$

所以 E_l 为弱化缓冲算子.

(2)当 X 为单调衰减序列时,即

$$x(k)\geqslant x(k+1)\geqslant\cdots\geqslant x(n)>0,$$

所以

$$\frac{x(k)e_l}{x(k)}=\left[\left(\frac{x(n)}{x(k)}\right)^{n\cdots(n+l-2)}\times\cdots\times\left(\frac{x(k)}{x(k)}\right)^{k\cdots(k+l-2)}\right]^{\frac{1}{n\cdots(n+l-2)+\cdots+k\cdots(k+l-2)}}\leqslant 1,$$

即

$$x(k)e_l\leqslant x(k),$$

所以 E_l 为弱化缓冲算子.

(3)当 X 为振荡序列时,令

$$x(k)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}x(i),$$
$$x(h)=\min_{1\leqslant i\leqslant n}x(i),$$

对 $\forall s\in\{1,2,\cdots,n\}$,有

$$x(k)\geqslant x(s),\cdots,x(n),$$
$$x(h)\leqslant x(s),\cdots,x(n),$$

则

$$\frac{x(s)e_l}{x(k)}=\left[\left(\frac{x(n)}{x(k)}\right)^{n\cdots(n+l-2)}\times\cdots\times\left(\frac{x(s)}{x(k)}\right)^{s\cdots(s+l-2)}\right]^{\frac{1}{n\cdots(n+l-2)+\cdots+s\cdots(s+l-2)}}\leqslant 1;$$

$$\frac{x(s)e_l}{x(h)}=\left[\left(\frac{x(n)}{x(h)}\right)^{n\cdots(n+l-2)}\times\cdots\times\left(\frac{x(s)}{x(h)}\right)^{s\cdots(s+l-2)}\right]^{\frac{1}{n\cdots(n+l-2)+\cdots+s\cdots(s+l-2)}}\geqslant 1.$$

即,对 $\forall s\in\{1,2,\cdots,n\}$,有

$$x(s)e_l\leqslant x(k)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}x(i),$$
$$x(s)e_l\geqslant x(h)=\min_{1\leqslant i\leqslant n}x(i),$$
$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}x(i)d_l\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}x(i),$$
$$\min_{1\leqslant i\leqslant n}x(i)d_l\geqslant\min_{1\leqslant i\leqslant n}x(i).$$

所以 E_l 为弱化缓冲算子.

综上可得,$\{E_l,l=1,2,3,\cdots\}$ 为弱化缓冲算子序列.

当 $l=1$ 时，即为简单几何平均弱化缓冲算子

$$x(k)e_1=[x(k)\times\cdots\times x(n)]^{\frac{1}{n-k+1}};$$

当 $l=2$ 时，即为加权几何平均弱化缓冲算子，

$$x(k)e_2=[x^k(k)\times\cdots\times x^n(n)]^{\frac{1}{k+\cdots+n}}.$$

同理，可考虑三阶以及更高阶反向累积和几何平均弱化算子.

定理 2.3　设 $X=(x(1),x(2),\cdots,x(n))$ 为非负系统数据序列，

$$x(k)e_l=[x(n)^{n\cdots(n+l-2)}\times\cdots\times x(k)^{k\cdots(k+l-2)}]^{\frac{1}{n\cdots(n+l-2)+\cdots+k\cdots(k+l-2)}},$$

$$x(k)d_l=\frac{\frac{1}{(l-1)!}[n\cdots(n+l-2)x(n)+\cdots+k\cdots(k+l-2)x(k)]}{\frac{1}{(l-1)!}[n\cdots(n+l-2)+\cdots+k\cdots(k+l-2)]},$$

则

$$x(k)e_l\leqslant x(k)d_l,l=1,2,\cdots.$$

当且仅当 $x(1)=x(2)=\cdots=x(n)$，即序列为常数序列时，等式才成立.

证明：由定理 2.1 与定理 2.2 知定理 2.3 成立.

2.2　弱化缓冲算子序列的性质

缓冲算子满足的不动点公理体现了冲击扰动系统对其真实行为数据序列新信息的优先原则，对于 $l(l=1,2,\cdots)$ 阶反向累积和弱化缓冲算子，其对新信息 $x(n)$ 的作用还具有以下规律：

性质 2.1　$l(l=1,2,\cdots)$ 阶反向累积和弱化缓冲算子作用序列，赋予新信息 $x(n)$ 的权重

$$\frac{n\cdots(n+l-2)}{n\cdots(n+l-2)+\cdots+k(k+1)\cdots(k+l-2)}$$

为有界递增序列.

证明：对 $\forall s\in\{k,k+1,\cdots,n\}$，有

$$k(k+1)\cdots(k+l-2)\leqslant s(s+1)\cdots(s+l-2)\leqslant n(n+1)\cdots(n+l-2),$$

故

$$n\cdots(n+l-2)+\cdots+k\cdots(k+l-2)\leqslant(n-k+1)n\cdots(n+l-2),$$

$$\frac{1}{n-k+1}\leqslant\frac{n\cdots(n+l-2)}{n\cdots(n+l-2)+\cdots+k(k+1)\cdots(k+l-2)}\leqslant 1.$$

即权重数列为区间 $\left[\frac{1}{n-k+1},1\right]$ 上的有界数列.

又对 $l\leqslant l+1$,

$$\frac{n\cdots(n+l-1)}{n\cdots(n+l-1)+\cdots+k\cdots(k+l-1)}$$

$$=\frac{n\cdots(n+l-2)}{n\cdots(n+l-2)+\cdots+k\cdots\frac{(k+l-1)}{(n+l-1)}}$$

$$\geqslant\frac{n\cdots(n+l-2)}{n\cdots(n+l-2)+\cdots+k\cdots(k+l-2)}.$$

即权重数列关于 l 为单调增加数列.

性质 2.2 当 $l\to\infty$ 时,

$$\frac{n\cdots(n+l-2)}{n\cdots(n+l-2)+\cdots+k\cdots(k+l-2)}\to 1.$$

证明:由于

$$\frac{(k+1)\cdots(k+l-1)}{k\cdots(k+l-2)}=\frac{(k+l-1)}{k}\to\infty\quad(l\to\infty),$$

$$\frac{(k+2)\cdots(k+l)}{(k+1)\cdots(k+l-1)}=\frac{(k+l)}{(k+1)}\to\infty\quad(l\to\infty),$$

$$\vdots$$

$$\frac{n\cdots(n+l-2)}{(n-1)\cdots(n+l-3)}=\frac{(n+l-2)}{(n-1)}\to\infty\quad(l\to\infty),$$

故

$$\frac{n\cdots(n+l-2)}{n\cdots(n+l-2)+\cdots+k\cdots(k+l-2)}$$

$$=\frac{1}{\frac{k\cdots(k+l-2)}{n\cdots(n+l-2)}+\cdots+1}\to 1\quad(l\to\infty),$$

即当 $l\to\infty$ 时，灰色序列生成的第 k 个缓冲数据 $x(k)d_l$ 利用新信息 $x(n)$ 的权重为 1，因此该弱化缓冲算子序列充分体现灰色系统理论的信息观.

2.3　实例分析

【实例 1】 某市乡镇企业 1994～1998 年的总产值(单位:亿)分别为

269.54,284.45,474.62,564.79,597.6,

则每年的增长率分别为

31.53%,23.68%,16.14%,5.81%.

可见，这个数据序列在开始阶段增长速度较快，而到后来其增长速度变慢. 分析原因，可能是开始阶段有相应的鼓励政策，使之可以快速的发展，再就是企业发展初期，由于刚刚起步，基数较小，开始进入的企业也多是见效迅速的完全竞争型企业，但是随着时间的发展，相关政策的收回和大多数企业渐渐进入平稳期，其增长速度也就渐渐慢了下来.

由此可见，在进行预测时，新信息就代表了新的情况和政策，理应在预测时有更大的权重，那么利用原始的数据序列直接建模就是不可取的. 为了能够使预测符合现实，需要对该数据进行弱化处理. 下面以 1994～1997 年的数据为建模数据，1998 年的数据作为模型检验型数据.

为了对比效果，我们先利用原始数据建立 GM(1,1) 的白化方程并进行计算，得一步预测结果如下

780.4701.

再利用 $D_l(l=1,2,3,\cdots,10)$ 对其作用，得弱化数据序列分别为

$$XD_1=(423.3500,474.6200,519.7050,564.7900),$$

$$XD_2=(472.1460,494.6578,526.1457,564.7900),$$

$$XD_3=(495.9255,507.8405,530.9762,564.7900),$$

$$XD_4=(509.9811,517.0529,534.7333,564.7900),$$

$XD_5=(519.2632,523.8036,537.7390,564.7900)$,

$XD_6=(525.8512,528.9393,540.1982,564.7900)$,

$XD_7=(530.7701,532.9653,542.2475,564.7900)$,

$XD_8=(534.5834,536.1995,543.9815,564.7900)$,

$XD_9=(537.6265,538.8507,545.4679,564.7900)$,

$XD_{10}=(540.1117,541.0611,546.7560,564.7900)$.

依次对上述弱化序列建立 GM(1,1)的白化方程并进行计算,得一步预测结果分别为

616.1228

602.5447

594.1035

588.4716

584.5028

581.5836

579.3619

577.6233

576.2312

575.0948

同样,利用 $E_l(l=1,2,3)$ 对其作用,得弱化数据序列分别为

$XE_1=(408.2480,468.8396,517.7457,564.7900)$,

$\mathrm{XE}_2=(460.9872,489.3111,524.2184,564.7900)$,

$\mathrm{XE}_3=(487.6458,503.1021,529.1260,564.7900)$.

依次对上述弱化序列建立 GM(1,1) 的白化方程并进行计算,得一步预测结果分别为

620.1246

606.0519

597.0748

将如上所得数据绘制成表 2.1：

表 2.1

弱化算子作用	一步预测结果	实际结果	一步预测误差
XD_1	616.1228	597.6000	3.0995%
XD_2	602.5447	597.6000	0.8274%
XD_3	594.1035	597.6000	0.5851%
XD_4	588.4716	597.6000	1.5275%
XD_5	584.5028	597.6000	2.1916%
XD_6	581.5836	597.6000	2.6801%
XD_7	579.3619	597.6000	3.0519%
XD_8	577.6233	597.6000	3.3428%
XD_9	576.2312	597.6000	3.5758%
XD_{10}	575.0948	597.6000	3.7659%
XE_1	620.1246	597.6000	3.7692%
XE_2	606.0519	597.6000	1.4143%
XE_3	597.0748	597.6000	0.0879%

由上表的结果可得：

(1)算子 D_l 在 $l=1,2,3$ 时一步预测误差逐渐减小，在 $l=3$ 时的一步预测误差最小，为 0.5851%，从 $l\geqslant 4$ 直到 10 又逐渐增大.

(2)算子 E_l 在 $l=1,2,3$ 时一步预测误差逐渐减小，在 $l=3$ 时的一步预测误差最小，为 0.0879%，效果远高于 D_3 .

(3)比起未经弱化算子作用的数据序列的预测值 780.4701，其误差为 30.6008%，可见经过弱化算子作用的预测值要更精确些.

【实例 2】 据统计，2002～2007 年中国的高中毕业生人数(单位：万)分别为

383.8，458.1，546.9，661.6，727.1，788.3，

则每年的增长率分别为

19.36%，19.38%，20.97%，9.90%，8.42%.

可见前半部分增长速度较快,而后半部分增长速度较慢.分析原因,在2002年左右的高中毕业生,基本上都出生于80年代的人口高峰时期,而同时高校也在进行扩招,于是带动了高中学校的扩招,因此在数据序列的前几年,毕业生的数量有较大的增长.我们又知道,由于国家的计划生育政策极大地控制了人口的快速增长,相应的,高中毕业生的人数开始渐渐处于小增长的状态.所以,如果利用原始数据直接建模,数据信息的干扰性比较大,而去掉又有可能减少相关性,为了在新、旧信息之间达到一个平衡,有必要用弱化缓冲算子对原始数据序列作用.

为了检验实验的效果,先利用原始数据建立GM(1,1)的白化方程并进行计算,得一步预测结果如下

$$861.0482.$$

再利用 $D_l(l=1,2,3,\cdots,10,\cdots)$,得弱化数据序列分别为

$$XD_1=(555.5000,598.4250,645.2000,694.3500,727.1000),$$

$$XD_2=(614.8400,631.3429,660.2167,697.9889,727.1000),$$

$$XD_3=(644.6286,652.3000,671.0935,700.9000,727.1000),$$

$$XD_4=(662.3671,666.4043,679.2231,703.2818,727.1000),$$

$$XD_5=(674.0540,676.3760,685.4708,705.2667,727.1000),$$

$$XD_6=(682.2929,683.7211,690.3897,706.9462,727.1000),$$

$$XD_7=(688.3912,689.3170,694.3435,708.3857,727.1000),$$

$$XD_8=(693.0747,693.7008,697.5790,709.6333,727.1000),$$

$$XD_9=(696.7772,697.2155,700.2681,710.7250,727.1000),$$

$$XD_{10}=(699.7730,700.0890,702.5333,711.6882,727.1000),$$

$$XD_{20}=(713.5074,713.5384,714.0201,717.3963,727.1000),$$

$$XD_{40}=(720.3906,720.3931,720.4704,721.5255,727.1000),$$

$$XD_{100}=(724.4503,724.4504,724.4562,724.6514,727.1000),$$

$$XD_{110}=(724.6934,724.6935,724.6979,724.8607,727.1000),$$

$XD_{125} = (724.9846, 724.9846, 724.9877, 725.1152, 727.1000)$,

$XD_{140} = (725.2130, 725.2130, 725.2152, 725.3177, 727.1000)$,

$XD_{160} = (725.4505, 725.4505, 725.4519, 725.5311, 727.1000)$,

$XD_{165} = (725.5008, 725.5008, 725.5021, 725.5767, 727.1000)$.

依次对上述弱化序列建立 GM(1,1) 的白化方程并进行计算，得一步预测结果分别为

781.4491

764.1945

753.8175

747.1908

742.7321

739.5994

737.3185

735.6079

734.2929

733.2605

729.1229

727.6893

727.2041

727.1866

727.1676

727.1542

727.1417

727.1393

同理，再利用 $E_l(l = 1,2,3)$ 对其作用，得弱化数据序列分别为

$XE_1 = (540.7949, 589.2023, 640.7656, 693.5772, 727.1000)$,

$XE_2 = (603.4947, 623.3243, 656.1549, 697.2243, 727.1000)$,

$XE_3 = (636.1382, 645.6628, 667.4665, 700.1558, 727.1000)$.

依次对上述弱化序列建立 GM(1,1) 的白化方程并进行计算，得一步预测结果分别为

786.5493

768.4148

757.1667

将如上所得数据绘制成表 2.2：

表 2.2

弱化算子作用	一步预测结果	实际结果	一步预测误差
XD_1	781.4491	788.3000	0.8691%
XD_2	764.1945	788.3000	3.0579%
XD_3	753.8175	788.3000	4.3743%
XD_4	747.1908	788.3000	5.2149%
XD_5	742.7321	788.3000	5.7805%
XD_6	739.5994	788.3000	6.1779%
XD_7	737.3185	788.3000	6.4673%
XD_8	735.6079	788.3000	6.6843%
XD_9	734.2929	788.3000	6.8511%
XD_{10}	733.2605	788.3000	6.9820%
XD_{20}	729.1229	788.3000	7.5069%
XD_{40}	727.6893	788.3000	7.6888%
XD_{100}	727.2041	788.3000	7.7503%
XD_{110}	727.1866	788.3000	7.7526%
XD_{125}	727.1676	788.3000	7.7550%
XD_{140}	727.1542	788.3000	7.7567%
XD_{160}	727.1417	788.3000	7.7583%
XD_{165}	727.1393	788.3000	7.7586%
XE_1	786.5493	788.3000	0.2221%
XE_2	768.4148	788.3000	2.5225%
XE_3	757.1667	788.3000	3.9494%

从表 2.2 可得:

(1)弱化缓冲算子 D_l 在 $l=1$ 时的一步预测误差最小,为 0.8691%,随着 l 的增加,其结果越来越趋近于 $x(5)$,即信息项.

(2)弱化缓冲算子 E_l 在 $l=1$ 时的一步预测误差最小,为 0.2221%.

(3)当 $l=1,2,3$ 时,E_l 的效果要好于 D_l.

(4)比起未经弱化算子作用的数据序列的预测值 861.0482,其误差为 9.2285%,可见经过弱化算子作用的预测值,更加符合实际情形.

第 3 章 基于反向累积法的强化缓冲算子理论研究

3.1 强化缓冲算子序列

刘思峰、党耀国等教授在其专著《灰色系统理论及其应用》中构造了下列强化缓冲算子，设 $X=(x(1),x(2),\cdots,x(n))$ 为系统行为数据序列，令 $XD_1=(x(1)d_1,x(2)d_1,\cdots,x(n)d_1)$，其中

$$x(k)d_1=\frac{(n-k+1)x^2(k)}{x(k)+x(k+1)+\cdots+x(n)},k=1,2,\cdots,n,$$

则当 X 为单调增长序列、单调衰减序列或振荡序列时，D_1 皆为强化缓冲算子.

在此，我们称 D_1 为平均强化缓冲算子，并利用反向累积法及定义 1.2，构建新的强化缓冲算子.

定理 3.1 设 $X=(x(1),x(2),\cdots,x(n))$ 为系统行为数据序列，令

$$XD_l=(x(1)d_l,\cdots,x(n)d_l),$$

其中

$$x(k)d_l=\frac{\frac{1}{(l-1)!}[n(n+1)\cdots(n+l-2)+k\cdots(k+l-2)]x^2(k)}{\frac{1}{(l-1)!}[n(n+1)\cdots(n+l-2)x(n)+k\cdots(k+l-2)x(k)]},$$

$$k=1,2,\cdots,n,$$

则当 X 为单调增长序列、单调衰减序列或振荡序列时，D_l $(l=1,2,3,4,\cdots)$ 为 l 阶反向累积和算术平均强化缓冲算子(l—BCASBO)，其中

$$\frac{1}{(l-1)!}[n(n+1)\cdots(n+l-2)+\cdots+k(k+1)\cdots(k+l-2)]$$

$$=\frac{1}{l!}[n(n+1)\cdots(n+l-1)-(k-1)k\cdots(k+l-2)].$$

证明:容易验证,算子序列 $\{D_l, l=1,2,3,\cdots\}$ 满足缓冲算子的三个公理，因而 D_l 为缓冲算子.

(1)当 X 为单调增长序列时,即

$$x(k)\leqslant x(k+1)\leqslant\cdots\leqslant x(n),$$

所以

$$x(k)d_l=\frac{\frac{1}{(l-1)!}[n(n+1)\cdots(n+l-2)+\cdots+k(k+1)\cdots(k+l-2)]x^2(k)}{\frac{1}{(l-1)!}[n(n+1)\cdots(n+l-2)x(n)+\cdots+k(k+1)\cdots(k+l-2)x(k)]}$$

$$\leqslant\frac{\frac{1}{(l-1)!}[n(n+1)\cdots(n+l-2)+\cdots+k(k+1)\cdots(k+l-2)]x^2(k)}{\frac{1}{(l-1)!}[n(n+1)\cdots(n+l-2)+\cdots+k(k+1)\cdots(k+l-2)]x(k)}=x(k).$$

即 D_l 为强化缓冲算子.

(2)当 X 为单调衰减序列时,即

$$x(k)\geqslant x(k+1)\geqslant\cdots\geqslant x(n),$$

所以

$$x(k)d_l=\frac{\frac{1}{(l-1)!}[n(n+1)\cdots(n+l-2)+\cdots+k(k+1)\cdots(k+l-2)]x^2(k)}{\frac{1}{(l-1)!}[n(n+1)\cdots(n+l-2)x(n)+\cdots+k(k+1)\cdots(k+l-2)x(k)]}$$

$$\geqslant\frac{\frac{1}{(l-1)!}[n(n+1)\cdots(n+l-2)+\cdots+k(k+1)\cdots(k+l-2)]x^2(k)}{\frac{1}{(l-1)!}[n(n+1)\cdots(n+l-2)+\cdots+k(k+1)\cdots(k+l-2)]x(k)}=x(k).$$

即 D_l 为强化缓冲算子.

(3)当 X 为振荡序列时,令

$$x(k)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}x(i),x(h)=\min_{1\leqslant i\leqslant n}x(i).$$

即

$$x(k)\geqslant x(k+1),\cdots,x(n),$$
$$x(h)\leqslant x(h+1),\cdots,x(n),$$

则

$$x(k)d_l=\frac{\frac{1}{(l-1)!}[n(n+1)\cdots(n+l-2)+\cdots+k(k+1)\cdots(k+l-2)]x^2(k)}{\frac{1}{(l-1)!}[n(n+1)\cdots(n+l-2)x(n)+\cdots+k(k+1)\cdots(k+l-2)x(k)]}$$

$$\geqslant\frac{\frac{1}{(l-1)!}[n(n+1)\cdots(n+l-2)+\cdots+k(k-1)\cdots(k+l-2)]x^2(k)}{\frac{1}{(l-1)!}[n(n+1)\cdots(n+l-2)+\cdots+k(k+1)\cdots(k+l-2)]x(k)}$$

$$=x(k);$$

$$x(h)d_l=\frac{\frac{1}{(l-1)!}[n(n+1)\cdots(n+l-2)+\cdots+h(h+1)\cdots(h+l-2)]x^2(h)}{\frac{1}{(l-1)!}[n(n+1)\cdots(n+l-2)x(n)+\cdots+h(h+1)\cdots(h+l-2)x(h)]}$$

$$\leqslant\frac{\frac{1}{(l-1)!}[n(n+1)\cdots(n+l-2)+\cdots+h(h+1)\cdots(h+l-2)]x^2(h)}{\frac{1}{(l-1)!}[n(n+1)\cdots(n+l-2)+\cdots+h(h+1)\cdots(h+l-2)]x(h)}$$

$$=x(h).$$

于是

$$x(k)d_l\geqslant x(k)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}x(i),$$
$$x(h)d_l\leqslant x(h)=\min_{1\leqslant i\leqslant n}x(i),$$
$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}x(i)d_l\geqslant x(k)d_l\geqslant x(k)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}x(i),$$
$$\min_{1\leqslant i\leqslant n}x(i)d_l\leqslant x(h)d_l\leqslant x(h)=\min_{1\leqslant i\leqslant n}x(i).$$

所以,D_l 为强化缓冲算子.

综上可得,$\{D_l,l=1,2,3,\cdots\}$ 为强化缓冲算子序列.

当 $l=1$ 时，即为党氏强化缓冲算子

$$x(k)d_1=\frac{(n-k+1)x^2(k)}{x(k)+\cdots+x(n)}.$$

同理，可以考虑二阶以及更高阶反向累积和算述平均强化缓冲算子.

定理 3.2 设 $X=(x(1),x(2),\cdots,x(n))$ 为系统数据序列，且 $x(i)>0$，$i=1,\cdots,n$，令

$$XE_l=(x(1)e_l,\cdots,x(n)e_l),$$

其中

$$x(k)e_l=\frac{x^2(k)}{\left[x(n)^{\frac{n(n+1)\cdots(n+l-2)}{(l-1)!}}\times\cdots\times x(k)^{\frac{k(k+1)\cdots(k+l-2)}{(l-1)!}}\right]^{\frac{(l-1)!}{n(n+1)\cdots(n+l-2)+\cdots+k(k+1)\cdots(k+l-2)}}},$$

$$k=1,2,\cdots,n,$$

则当 X 为单调增长序列、单调衰减序列或振荡序列时，$E_l(l=1,2,3,4,\cdots)$ 为 l 阶反向累积和几何平均强化缓冲算子(l—BCGASBO).

证明: 容易验证，算子序列 $\{E_l,l=1,2,3,\cdots\}$ 满足缓冲算子的三个公理，因而 E_l 为缓冲算子.

(1)当 X 为单调增长序列时，即

$$0<x(k)\leqslant x(k+1)\leqslant\cdots\leqslant x(n),$$

则

$$\begin{aligned}x(k)e_l&=\frac{x^2(k)}{\left[x(n)^{\frac{n(n+1)\cdots(n+l-2)}{(l-1)!}}\times\cdots\times x(k)^{\frac{k(k+1)\cdots(k+l-2)}{(l-1)!}}\right]^{\frac{(l-1)!}{n(n+1)\cdots(n+l-2)+\cdots+k(k+1)\cdots(k+l-2)}}}\\&\leqslant\frac{x^2(k)}{\left[x(k)^{\frac{n(n+1)\cdots(n+l-2)}{(l-1)!}}\times\cdots\times x(k)^{\frac{k(k+1)\cdots(k+l-2)}{(l-1)!}}\right]^{\frac{(l-1)!}{n(n+1)\cdots(n+l-2)+\cdots+k(k+1)\cdots(k+l-2)}}}\\&=x(k).\end{aligned}$$

由定理 1.1～1.3 知，E_l 为强化缓冲算子.

(2)当 X 为单调衰减序列时，即

$$x(k)\geqslant x(k+1)\geqslant\cdots\geqslant x(n)>0,$$

则

$$\begin{aligned}x(k)e_l &= \frac{x^2(k)}{\left[x(n)^{\frac{n(n+1)\cdots(n+l-2)}{(l-1)!}}\times\cdots\times x(k)^{\frac{k(k+1)\cdots(k+l-2)}{(l-1)!}}\right]^{\frac{(l-1)!}{n(n+1)\cdots(n+l-2)+\cdots+k(k+1)\cdots(k+l-2)}}}\\ &\geqslant \frac{x^2(k)}{\left[x(k)^{\frac{n(n+1)\cdots(n+l-2)}{(l-1)!}}\times\cdots\times x(k)^{\frac{k(k+1)\cdots(k+l-2)}{(l-1)!}}\right]^{\frac{(l-1)!}{n(n+1)\cdots(n+l-2)+\cdots+k(k+1)\cdots(k+l-2)}}}\\ &= x(k).\end{aligned}$$

由定理 1.1～1.3 知，E_l 为强化缓冲算子.

(3)当 X 为振荡序列时，令

$$x(k)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}x(i),$$
$$x(h)=\min_{1\leqslant i\leqslant n}x(i),$$

即

$$x(k)\geqslant x(k+1),\cdots,x(n)>0,0<x(h)\leqslant x(h+1),\cdots,x(n),$$

则

$$\begin{aligned}x(k)e_l &= \frac{x^2(k)}{\left[x(n)^{\frac{n(n+1)\cdots(n+l-2)}{(l-1)!}}\times\cdots\times x(k)^{\frac{k(k+1)\cdots(k+l-2)}{(l-1)!}}\right]^{\frac{(l-1)!}{n(n+1)\cdots(n+l-2)+\cdots+k(k+1)\cdots(k+l-2)}}}\\ &\geqslant \frac{x^2(k)}{\left[x(k)^{\frac{n(n+1)\cdots(n+l-2)}{(l-1)!}}\times\cdots\times x(k)^{\frac{k(k+1)\cdots(k+l-2)}{(l-1)!}}\right]^{\frac{(l-1)!}{n(n+1)\cdots(n+l-2)+\cdots+k(k+1)\cdots(k+l-2)}}}\\ &= x(k);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x(h)e_l &= \frac{x^2(h)}{\left[x(n)^{\frac{n(n+1)\cdots(n+l-2)}{(l-1)!}}\times\cdots\times x(h)^{\frac{h(h+1)\cdots(h+l-2)}{(l-1)!}}\right]^{\frac{(l-1)!}{n(n+1)\cdots(n+l-2)+\cdots+h(h+1)\cdots(h+l-2)}}}\\ &\leqslant \frac{x^2(h)}{\left[x(h)^{\frac{n(n+1)\cdots(n+l-2)}{(l-1)!}}\times\cdots\times x(h)^{\frac{h(h+1)\cdots(h+l-2)}{(l-1)!}}\right]^{\frac{(l-1)!}{n(n+1)\cdots(n+l-2)+\cdots+h(h+1)\cdots(h+l-2)}}}\\ &= x(h).\end{aligned}$$

则

$$x(k)e_l\geqslant x(k)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}x(i),$$
$$x(h)e_l\leqslant x(h)=\min_{1\leqslant i\leqslant n}x(i),$$
$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}x(i)e_l\geqslant x(k)e_l\geqslant x(k)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}x(i),$$
$$\min_{1\leqslant i\leqslant n}x(i)e_l\leqslant x(h)e_l\leqslant x(h)=\min_{1\leqslant i\leqslant n}x(i).$$

由定理 1.1～1.3 知，E_l 为强化缓冲算子.

综上可得，$\{E_l, l = 1,2,3,\cdots\}$ 为强化缓冲算子序列.

当 $l = 1$ 时，即为党氏强化缓冲算子

$$x(k)e_1 = \frac{x^2(k)}{[x(k) \times x(k+1) \times \cdots \times x(n)]^{\frac{1}{n-k+1}}}.$$

同理，可以考虑二阶以及更高阶反向累积和几何平均强化缓冲算子.

定理 3.3　设 $X = (x(1), x(2), \cdots, x(n))$ 为非负系统数据序列，

$$x(k)e_l = \frac{x^2(k)}{\left[x(n)^{\frac{n(n+1)\cdots(n+l-2)}{(l-1)!}} \times \cdots \times x(k)^{\frac{k(k+1)\cdots(k+l-2)}{(l-1)!}}\right]^{\frac{\frac{1}{(l-1)!}}{n(n+1)\cdots(n+l-2)+\cdots+k(k+1)\cdots(k+l-2)}}},$$

$$x(k)d_l = \frac{\frac{1}{(l-1)!}[n(n+1)\cdots(n+l-2) + \cdots + k(k+1)\cdots(k+l-2)]x^2(k)}{\frac{1}{(l-1)!}[n(n+1)\cdots(n+l-2)x(n) + \cdots + k(k+1)\cdots(k+l-2)x(k)]},$$

则

$$x(k)e_l \leqslant x(k)d_l, l = 1,2,\cdots,$$

当且仅当 $x(1) = x(2) = \cdots = x(n)$，即为常数序列时，等式才成立.

证明：由定理 3.1 与定理 3.2 知定理 3.3 成立.

3.2　实例分析

【实例 1】　下面以文献[1]中的 1995～2003 年南京市农林牧渔总产值数据为例来说明本节提出的强化缓冲算子序列，见表 3.1.

表 3.1　1995～2003 年南京市农林牧渔总产值(单位：亿元)

年份	1995	1996	1997	1998	1999
总产值	86.1946	91.9895	94.2439	96.9644	98.9199
年份	2000	2001	2002	2003	
总产值	106.341	113.290	120.010	132.590	

以1995～1999年数据作为系统行为数据，分别在无缓冲作用、1阶、2阶反向累积和算术平均强化缓冲算子以及几何平均强化缓冲算子作用下，建立GM(1,1)模型，见表3.2，模拟2000～2003年农林牧渔总产值以及误差，见表3.2.

表3.2　不同强化缓冲算子作用后预测值及相对误差表

年份	2000年	2001年	2002年	2003年
无缓冲算子	101.544	104.072	106.663	109.319
相对误差	−4.51%	−8.14%	−11.12%	−17.55%
1−BCASBO	102.94015	106.86788	110.94548	115.17865
相对误差	−3.20%	−5.67%	−7.55%	−13.13%
2−BCASBO	103.31578	107.56404	111.98699	116.5918
相对误差	−2.84%	−5.05%	−6.69%	−12.07%
3−BCASBO	103.54764	108.00397	112.65209	117.50024
相对误差	−2.63%	−4.67%	−6.13%	−11.38%
1−BCGASBO	102.9238	106.83738	110.89977	115.11664
相对误差	−3.21%	−5.70%	−7.59%	−13.18%
2−BCGASBO	103.30171	107.53742	111.94681	116.537
相对误差	−2.86%	−5.08%	−6.72%	−12.11%
3−BCGASBO	103.53611	107.9818	112.61838	117.45404
相对误差	−2.64%	−4.69%	−6.16%	−11.42%

由表3.2可得：

(1)在没有进行缓冲处理情况下，预测值的平均相对误差为10.33%，采用1阶、2阶、3阶反向累积和算术平均强化缓冲算子以及几何平均强化缓冲算子处理后，预测值的平均相对误差均比未处理的小.

(2)随着阶数的增长，相对误差呈下降的趋势.

【实例2】 据统计，1996～1999年国民总收入数据(单位：亿元)序列为

$$X=(70142.4916,78060.8315,83024.2798,88479.1548),$$

则平均每年的增长率仅为8.1%，而1997年到1998年的增长率为6.4%，1998年到1999年的增长率为6.6%. 这与国家实行的五年计划要求明显不符合，长期发展下去，必将导致产业结构发展不平衡，影响国民经济的可持续增长. 因此，从2000年开始，国家开始逐步调整产业结构，使这种缓慢增长的状况得到改善，为了能够及时准确地把握经济发展趋势，对经济的发展作科学的预测，必须对缓慢增长的数据加以处理，使其符合今后的发展趋势，在此基础上进行合理的预测.

以1996～1999年的数据作为系统行为数据，分别在无缓冲作用、1阶、2阶反向累积和算术平均强化缓冲算子下，建立GM(1,1)模型，预测2000～2004年的总产值及其误差.

(1)无缓冲作用下：

原始序列为

$$X=(70142.4916,78060.8315,83024.2798,88479.1548).$$

GM(1,1)模型为

$$\frac{\mathrm{d}X^{(1)}}{\mathrm{d}t}-0.6266X^{(1)}=71191.666486.$$

时间响应式为

$$\hat{X}^{(1)}(k+1)=1206295.830314e^{0.6266k}-1136153.338714.$$

由此得，模拟序列为

$$\hat{X}=(70142.4916,78005.205721,83049.417901,88419.81442).$$

残差序列为

$$\varepsilon^{(0)}=(0,-55.629279,25.138101,-59.34038).$$

相对误差序列为

$$\Delta=(0,-0.00071264,0.00030278,-0.00067067).$$

平均相对误差为

$$\Delta=0.056203\%.$$

预测值为

$$X^1 = (94137.488013, 100224.895375, 106705.945367, 113606.092919, 120952.439003).$$

实际值为

$$X' = (98000.454308, 108068.220558, 119095.689274, 135173.976149, 159586.747917).$$

预测值和实际值的相对误差为

$$\Delta' = (-0.0394, -0.0726, -0.1040, -0.1596, -0.2421).$$

(2)1 阶反向累积和算术平均强化缓冲算子作用下:

原始序列为

$$X = (70142.4916, 78060.8315, 83024.2798, 88479.1548),$$

1 阶缓冲序列为

$$XD_1 = (x(1)d_1, x(2)d_1, x(3)d_1, x(4)d_1) = (61556.0229, 73249.5903, 80383.5918, 88479.1548).$$

GM(1,1)模型为

$$\frac{dX^{(1)}}{dt} - 0.094472X^{(1)} = 63932.007587.$$

时间响应式为

$$\hat{X}^{(1)}(k+1) = 738287.535747e^{0.094472k} - 676731.512574.$$

由此得,模拟序列为

$$\hat{X} = (61556.0229, 73148.13319, 80395.51193, 88360.947255).$$

残差序列为

$$\varepsilon^{(0)} = (0, -101.45711, 11.92013, -118.207545).$$

相对误差序列为

$$\Delta = (0, -0.001385, 0.000148, -0.001336).$$

平均相对误差为

$$\Delta = 0.095646\%.$$

预测值为

$$X^2 = (97115.582851, 106737.611191, 117312.971907, 128936.119369, 141710.866306).$$

实际值为

$$X' = (98000.454308, 108068.220558, 119095.689274, 135173.976149, 159586.747917).$$

预测值和实际值的相对误差为

$$\Delta' = (-0.0090, -0.0123, -0.0150, -0.0461, -0.1120).$$

(3)2 阶反向累积和算术平均强化缓冲算子作用下：

原始序列为

$$X = (70142.4916, 78060.8315, 83024.2798, 88479.1548).$$

2 阶缓冲序列为

$$XD_2 = (x(1)d_2, x(2)d_2, x(3)d_2, x(4)d_2)$$
$$= (59330.0897, 72244.2856, 80020.0013, 88479.1548).$$

GM(1,1)模型

$$\frac{dX^{(1)}}{dt} - 0.101212X^{(1)} = 62607.573071.$$

时间响应式为

$$\hat{X}^{(1)}(k+1) = 67909.266371e^{0.101212k} - 618579.176671.$$

由此得，模拟序列为

$$\hat{X} = (59330.0897, 72204.851743, 79895.468871, 88405.221977).$$

残差序列为

$$\varepsilon^{(0)} = (0, -39.433857, -124.532429, \quad 73.932823).$$

相对误差序列为

$$\Delta = (0, 0.00054584, 0.00155626, 0.00083559).$$

平均相对误差为

$$\bar{\Delta} = 0.097923\%.$$

预测值为

$X^3 = (97821.358122, 108240.417148, 119769.221459, 132525.97123, 146641.456266)$.

实际值为

$X' = (98000.454308, 108068.220558, 119095.689274, 135173.976149, 159586.747917)$.

预测值和实际值的相对误差为

$$\Delta' = (-0.0018, 0.0016, 0.0056, -0.0196, -0.0811).$$

(4)将以上预测值及其相对误差做成表格如下：

表 3.3　不同强化缓冲算子作用后预测值及其相对误差

算子及误差	年份				
	2000	2001	2002	2003	2004
无缓冲算子	94137.488013	100224.895375	106705.945367	113606.092919	120952.439003
相对误差/%	−3.94	−7.26	−10.40	−15.96	−24.21
1−BCASBO	97115.582851	106737.611191	117312.971907	128936.119369	141710.866306
相对误差/%	−0.90	−1.23	−1.50	−4.61	−11.20
2−BCASBO	97821.358122	108240.417148	119769.221459	132525.97123	146641.456266
相对误差/%	-0.18	0.16	0.56	−1.96	−8.11

由表 3.3 可得：

(1)在没有进行缓冲处理的情况下，预测值的平均相对误差为 12.354%；采用 1 阶、2 阶反向累积和算术平均强化缓冲算子处理后，预测值的平均相对误差比未处理的小.

(2)随着阶数的增加，相对误差呈下降趋势.

(3)应用强化缓冲算子作用后的数据建模能取得良好的预测效果.

第 4 章 基于单调函数的新弱化缓冲算子理论研究

4.1 弱化缓冲算子序列

刘思峰、党耀国等教授在其专著《灰色系统理论及其应用》中构造了下列弱化缓冲算子，设 $X=(x(1),x(2),\cdots,x(n))$ 为系统行为数据序列，令

$$XD_i=(x(1)d_i,\cdots,x(n)d_i),i=1,2.$$

其中

$$x(k)d_1=\frac{w_kx(k)+\cdots+w_nx(n)}{w_k+\cdots+w_n},$$

$$x(k)d_2=\left[x(k)^{w_k}\times\cdots\times x(n)^{w_n}\right]^{\frac{1}{w_k+\cdots+w_n}},k=1,2,\cdots,n,$$

则当 X 为单调增长序列、单调衰减序列或振荡序列时，D_1、D_2 皆为弱化缓冲算子。

在此，我们在弱化缓冲算子 D_1、D_2 的基础上，利用单调函数理论构建新的弱化缓冲算子。

定理 4.1 设 $X=(x(1),x(2),\cdots,x(n))$ 为系统行为数据序列，且 $x(i)>0$，$f>0$，$w_i>0$，权重向量 $w=(w_1,\cdots,w_n)$，f 为严格单调递增（或递减）函数，

g 为其反函数. 令

$$XD_3 = (x(1)d_3, \cdots, x(n)d_3),$$

其中

$$x(k)d_3 = g\left\{\frac{w_k f(x(k)) + \cdots + w_n f(x(n))}{w_k + \cdots + w_n}\right\}, k = 1, 2, \cdots, n,$$

则当 X 为单调增长序列、单调衰减序列或振荡序列时，D_3 为弱化缓冲算子.

证明:容易验证

$$x(n)d_3 = g\left\{\frac{w_n f(x(n))}{w_n}\right\} = x(n),$$

即 D_3 满足缓冲算子公理一.

至于缓冲算子公理二、公理三，D_3 显然满足. 因而，D_3 为缓冲算子.

假设 f 为严格单调递增函数.

(1)当 X 为单调增长序列时，即

$$0 < x(k) \leqslant \cdots \leqslant x(n),$$

则

$$0 < f(x(k)) \leqslant \cdots \leqslant f(x(n)),$$

$$0 < (w_k + \cdots + w_n) f(x(k)) \leqslant w_k f(x(k)) + \cdots + w_n f(x(n)),$$

$$0 < f(x(k)) \leqslant \frac{w_k f(x(k)) + \cdots + w_n f(x(n))}{w_k + \cdots + w_n},$$

$$x(k)d_3 = g\left\{\frac{w_k f(x(k)) + \cdots + w_n f(x(n))}{w_k + \cdots + w_n}\right\} \geqslant g(f(x(k))) = x(k).$$

所以，D_3 为弱化缓冲算子.

(2)当 X 为单调衰减序列时，即

$$x(k) \geqslant \cdots \geqslant x(n) > 0,$$

则

$$f(x(k)) \geqslant \cdots \geqslant f(x(n)) > 0,$$

$$0 < w_k f(x(k)) + \cdots + w_n f(x(n)) \leqslant (w_k + \cdots + w_n) f(x(k)),$$

$$0 < \frac{w_k f(x(k)) + \cdots + w_n f(x(n))}{w_k + \cdots + w_n} \leqslant f(x(k)),$$

$$x(k)d_3 = g\left\{\frac{w_k f(x(k)) + \cdots + w_n f(x(n))}{w_k + \cdots w_n}\right\} \leqslant g(f(x(k))) = x(k).$$

所以，D_3 为弱化缓冲算子.

(3)当 X 为振荡序列时，令

$$x(k) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} x(i), x(h) = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} x(i),$$

对任意的 $i \in \{1,2,\cdots,n\}$，有

$$x(k) \geqslant x(i),\cdots,x(n); x(h) \leqslant x(i),\cdots,x(n),$$

$$f(x(k)) \geqslant f(x(i)),\cdots,f(x(n)) > 0,$$

$$0 < f(x(h)) \leqslant f(x(i)),\cdots,f(x(n)),$$

$$0 < w_i f(x(i)) + \cdots + w_n f(x(n)) \leqslant (w_i + \cdots + w_n) f(x(k)),$$

$$0 < (w_i + \cdots + w_n) f(x(h)) \leqslant w_i f(x(i)) + \cdots + w_n f(x(n)).$$

$$0 < \frac{w_i f(x(i)) + \cdots + w_n f(x(n))}{w_i + \cdots + w_n} \leqslant f(x(k)),$$

$$x(i)d_3 = g\left\{\frac{w_i f(x(i)) + \cdots + w_n f(x(n))}{w_i + \cdots + w_n}\right\} \leqslant g(f(x(k))) = x(k),$$

$$0 < f(x(h)) \leqslant \frac{w_i f(x(i)) + \cdots + w_n f(x(n))}{w_i + \cdots + w_n},$$

$$x(i)d_3 = g\left\{\frac{(w_i f(x(i)) + \cdots + w_n f(x(n))}{w_i + \cdots + w_n}\right\} \geqslant g(f(x(h))) = x(h).$$

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} x(i) \geqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} x(i)d_3, \min_{1 \leqslant i \leqslant n} x(i) \leqslant \min_{1 \leqslant i \leqslant n} x(i)d_3.$$

由定理 1.1～1.3 知，D_3 为弱化缓冲算子.

同理可证，当 f 为严格单调递减函数时，D_3 也为弱化缓冲算子.

定理 4.2　设 $X = (x(1), x(2), \cdots, x(n))$ 为系统数据序列，且 $x(i) > 0$，$f > 0, w_i > 0$．权重向量 $w = (w_1, \cdots, w_n)$，f 为严格单调递增(或递减)函数，g 为其反函数.令

$$x(k)d_4 = g\{[f^{w_k}(x(k)) \times \cdots \times f^{w_n}(x(n))]^{\frac{1}{w_k + \cdots + w_n}}\}, k = 1,2,\cdots,n,$$

其中

$$XD_4 = (x(1)d_4, \cdots, x(n)d_4),$$

则当 X 为单调增长序列、单调衰减序列或振荡序列时，D_4 为弱化缓冲算子.

证明:容易验证

$$x(n)d_4 = g\{[f^{w_n}(x(n))]^{\frac{1}{w_n}}\} = x(n),$$

即 D_4 满足缓冲算子公理一.

至于缓冲算子公理二、公理三，D_4 显然满足. 因而，D_4 为缓冲算子.

假设 f 为严格单调递增函数.

(1)当 X 为单调增长序列时，即

$$0 < x(k) \leqslant \cdots \leqslant x(n),$$

则

$$0 < f(x(k)) \leqslant \cdots \leqslant f(x(n)),$$

$$0 < f(x(k)) \leqslant [f^{w_k}(x(k)) \times \cdots \times f^{w_n}(x(n))]^{\frac{1}{w_k+\cdots+w_n}},$$

$$0 < x(k) = g(f(x(k))) \leqslant x(k)d_4 = g\{[f^{w_k}(x(k)) \times \cdots \times f^{w_n}(x(n))]^{\frac{1}{w_k+\cdots+w_n}}\},$$

所以，D_4 为弱化缓冲算子.

(2)当 X 为单调衰减序列时，即

$$x(k) \geqslant \cdots \geqslant x(n) > 0,$$

则

$$f(x(k)) \geqslant \cdots \geqslant f(x(n)) > 0,$$

$$f(x(k)) \geqslant [f^{w_k}(x(k)) \times \cdots \times f^{w_n}(x(n))]^{\frac{1}{w_k+\cdots+w_n}} > 0,$$

$$x(k) = g(f(x(k))) \geqslant g\{[f^{w_k}(x(k)) \times \cdots \times f^{w_n}(x(n))]^{\frac{1}{w_k+\cdots+w_n}}\} = x(k)d_4 > 0,$$

所以，D_4 为弱化缓冲算子.

(3)当 X 为振荡序列时，令

$$x(k) = \max_{1\leqslant i\leqslant n} x(i), x(h) = \min_{1\leqslant i\leqslant n} x(i),$$

对任意的 $i \in \{1,2,\cdots,n\}$，有

$$x(k) \geqslant x(i),\cdots,x(n); x(h) \leqslant x(i),\cdots,x(n).$$

$$f(x(k)) \geqslant f(x(i)),\cdots,f(x(n)) > 0,$$

$$0 < f(x(h)) \leqslant f(x(i)),\cdots,f(x(n)),$$

$$0<[f^{w_i}(x(i))\times\cdots\times f^{w_n}(x(n))]^{\frac{1}{w_i+\cdots+w_n}}\leqslant f(x(k)).$$

$$0<x(i)d_4\cdot g\{[f^{w_i}((x(i))\times\cdots\times f^{w_n}(x(n))]^{\frac{1}{w_i+\cdots+w_n}}\}\leqslant g(f(x(k)))=x(k),$$

$$[f^{w_i}(x(i))\times\cdots\times f^{w_n}(x(n))]^{\frac{1}{w_i+\cdots+w_n}}\geqslant f(x(h))>0,$$

$$x(i)d_4-g\{[f^{w_i}((x(i))\times\cdots\times f^{w_n}(x(n))]^{\frac{1}{w_i+\cdots+w_n}}\}\geqslant g(f(x(h)))=x(h)>0.$$

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}x(i)\geqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}x(i)d_4,\min_{1\leqslant i\leqslant n}x(i)\leqslant\min_{1\leqslant i\leqslant n}x(i)d_4.$$

由定理 1.1～1.3 知，D_4 为弱化缓冲算子.

同理可证，当 f 为严格单调递减函数时，D_3 也为弱化缓冲算子

定理 4.3　设 $X=(x(1),x(2),\cdots,x(n))$ 为非负的系统行为数据序列，且 $x(i)>0,f>0,w_i>0,w_i'>0$. 权重向量分别为 $w=(w_1,\cdots,w_n)$ 和 $w'=(w_1',\cdots,w_n')$，其中 $w_n\neq 0,w_n'\neq 0$. 若 $\frac{w_i}{w_{i-1}}\geqslant\frac{w_i'}{w_{i-1}'}$，即

$$w_iw_{i-1}'\geqslant w_{i-1}w_i',i=2,\cdots,n.$$

f 为严格单调递增(或递减)函数，g 为其反函数，则：

(1)当 X 为单调增长序列时，有

$$g\left(\frac{\sum_{i=k}^{n}w_if(x(i))}{\sum_{i=k}^{n}w_i}\right)\geqslant g\left(\frac{\sum_{i=k}^{n}w_i'f(x(i))}{\sum_{i=k}^{n}w_i'}\right);$$

(2)当 X 为单调递减序列时，有

$$g\left(\frac{\sum_{i=k}^{n}w_if(x(i))}{\sum_{i=k}^{n}w_i}\right)\leqslant g\left(\frac{\sum_{i=k}^{n}w_i'f(x(i))}{\sum_{i=k}^{n}w_i'}\right).$$

证明：假设 f 为严格单调递增函数，则 g 也为严格单调递增函数. 欲证

$$g\left(\frac{\sum_{i=k}^{n}w_if(x(i))}{\sum_{i=k}^{n}w_i}\right)\geqslant g\left(\frac{\sum_{i=k}^{n}w_i'f(x(i))}{\sum_{i=k}^{n}w_i'}\right),$$

则只需证明

$$\frac{\sum_{i=k}^{n} w_i f(x(i))}{\sum_{i=k}^{n} w_i} \geqslant \frac{\sum_{i=k}^{n} w_i' f(x(i))}{\sum_{i=k}^{n} w_i'},$$

考虑 $\sum_{i=k}^{n} w_i' \sum_{i=k}^{n} w_i f(x(i)) - \sum_{i=k}^{n} w_i \sum_{i=k}^{n} w_i' f(x(i))$ 的符号，

经计算，有

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=k}^{n} w_i' \sum_{i=k}^{n} w_i f(x(i)) - \sum_{i=k}^{n} w_i \sum_{i=k}^{n} w_i' f(x(i)) \\
&= [w_k' w_k f(x(k)) + w_k' w_{k+1} f(x(k+1)) + \cdots + w_k' w_n f(x(n)) \\
&\quad + w_{k+1}' w_k f(x(k)) + \cdots + w_n' w_k f(x(k)) + w_n' w_{k+1} f(x(k+1)) \\
&\quad + \cdots + w_n' w_n f(x(n))] - [w_k w_k' f(x(k)) + w_k w_{k+1}' f(x(k+1)) \\
&\quad + \cdots + w_k w_n' f(x(n)) + w_{k+1} w_k' f(x(k)) + \cdots + w_n w_k' f(x(k)) \\
&\quad + w_n w_{k+1}' f(x(k+1)) + \cdots + w_n w_n' f(x(n))] \\
&= \sum_{i=k}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} (w_j w_i' - w_j' w_i)(f(x(j)) - f(x(i))).
\end{aligned} \qquad (*)$$

由于

$$\frac{w_i}{w_{i-1}} \geqslant \frac{w_i'}{w_{i-1}'}, i = 2,3,\cdots,n,$$

有

$$w_j \geqslant w_j' \times \frac{w_{j-1}}{w_{j-1}'}, w_{j-1} \geqslant w_{j-1}' \times \frac{w_{j-2}}{w_{j-2}'},$$

故

$$w_j \geqslant w_j' \times \frac{w_{j-2}}{w_{j-2}'}, w_j \geqslant w_j' \times \frac{w_{j-3}}{w_{j-3}'} \geqslant \cdots \geqslant w_j' \times \frac{w_i}{w_i'},$$

即

$$(w_j w_i' - w_i w_j') \geqslant 0, j > i.$$

(1)当 X 为单调增长序列时,有

$$(x(j)-x(i))\geqslant 0, j>i,$$

又因 f 为严格单调递增函数,则

$$(f(x(j))-f(x(i)))\geqslant 0, j>i.$$

由(*)式知,

$$\sum_{i=k}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}(w_j w'_i-w'_j w_i)(f(x(j))-f(x(i)))\geqslant 0,$$

故

$$\frac{\sum_{i=k}^{n}w_i f(x(i))}{\sum_{i=k}^{n}w_i}\geqslant\frac{\sum_{i=k}^{n}w'_i f(x(i))}{\sum_{i=k}^{n}w'_i},$$

又因 g 为严格单调递增函数,则

$$g\left(\frac{\sum_{i=k}^{n}w_i f(x(i))}{\sum_{i=k}^{n}w_i}\right)\geqslant g\left(\frac{\sum_{i=k}^{n}w'_i f(x(i))}{\sum_{i=k}^{n}w'_i}\right);$$

(2)当 X 为单调递减序列时,有

$$(x(j)-x(i))\leqslant 0, j>i.$$

又因 f 为严格单调递增函数,则

$$(f(x(j))-f(x(i)))\leqslant 0, j>i.$$

由(*)式知,

$$\sum_{j=i+1}^{n}\sum_{i=k}^{n}(w_j w'_i-w'_j w_i)(f(x(j))-f(x(i)))\leqslant 0,$$

故

$$\frac{\sum_{i=k}^{n}w_i f(x(i))}{\sum_{i=k}^{n}w_i}\leqslant\frac{\sum_{i=k}^{n}w'_i f(x(i))}{\sum_{i=k}^{n}w'_i},$$

又因 g 为严格单调递增函数，则

$$g\left(\frac{\sum_{i=k}^{n} w_i f(x(i))}{\sum_{i=k}^{n} w_i}\right) \leqslant g\left(\frac{\sum_{i=k}^{n} w'_i f(x(i))}{\sum_{i=k}^{n} w'_i}\right).$$

定理 4.4 设 $X=(x(1),x(2),\cdots,x(n))$ 为非负的系统行为数据序列，且 $x(i)>0, f>0, w_i>0, w'_i>0$．权重向量分别为 $w=(w_1,\cdots,w_n)$ 和 $w'=(w'_1,\cdots,w'_n)$，其中 $w_n\neq 0, w'_n\neq 0$. 若 $\frac{w_i}{w_{i-1}}\geqslant\frac{w'_i}{w'_{i-1}}$，即

$$w_i w'_{i-1}\geqslant w_{i-1}w'_i, i=2,\cdots,n.$$

f 为严格单调递增(或递减)函数，g 为其反函数，则：

(1)当 X 为单调增长序列时，有

$$g\left(\left[\prod_{i=k}^{n} f^{w_i}(x(i))\right]^{\frac{1}{w_k+\cdots+w_n}}\right)\geqslant g\left(\left[\prod_{i=k}^{n} f^{w'_i}(x(i))\right]^{\frac{1}{w'_k+\cdots+w'_n}}\right);$$

(2)当 X 为单调递减序列时，有

$$g\left(\left[\prod_{i=k}^{n} f^{w_i}(x(i))\right]^{\frac{1}{w_k+\cdots+w_n}}\right)\leqslant g\left(\left[\prod_{i=k}^{n} f^{w'_i}(x(i))\right]^{\frac{1}{w'_k+\cdots+w'_n}}\right).$$

证明:先对函数 g 内部的表达式两边取对数，再进行推理、证明，其推导过程与定理4.3类似，最后再由 g 为严格单调递增(或递减)函数，即可得到结论.

4.2 实例分析

以上海市国际互联网用户数为例[25]，验证本章构造的弱化缓冲算子在GM(1,1)模型预测中的应用. 选取该市 2001～2007 年国际互联网用户数(单位:万户)作为原始数据：

$$X=(310,420,432,633,803,957,1080).$$

从原始数据可以发现，上海市上网用户数增长势头很猛，年平均增长率为

19.52%，如此高的增长率不可能一直保持下去. 因此，直接用原始数据建模，预测结果令人难以相信. 经过分析，笔者认为上海市上网用户数与 Internet 的刚刚兴起以及政府的大力推广等因素有关，因此要进行若干年后上网用户数的预测，必须弱化其增长趋势，将上述政策因素附加到过去的年份中，从而消除前期政策因素对后期上网用户数增加速度的影响，使得模型预测精度更高，预测结果与实际情况相符合.

以 2001～2006 年的数据作为建模数据，以 2007 年的数据作为模拟检验数据. 为了方便，令 $f(x) = x^{2.1}$，权重为等权重，利用 D_3 和 D_4 对原始序列进行缓冲作用，得到一阶缓冲序列：

$$XD_3 = (639.21, 684.96, 735.27, 809.63, 883.70, 957),$$

$$XD_4 = (548.94, 615.39, 677.06, 786.46, 876.62, 957).$$

通过计算得到平均相对误差和一步预测误差，如表 4.1 所示.

表 4.1 弱化前后模型的平均相对误差和一步预测精度比较

模型	弱化缓冲算子	平均相对误差(%)	一步预测误差(%)
1	无	5.732	11.947
2	XD_3	0.451	3.410
3	XD_4	1.268	0.162

由表 4.1 可以看出，原始序列经过缓冲算子 D_4 作用后，一步预测精度最高，其预测模型为：

$$\hat{x}(2001+t) = 5173.731e^{0.112535\times t} - 4624.7955.$$

得 2007 年上海市互联网用户数的预测值为 1081.747 万户，与实际值基本吻合.

第 5 章

基于单调函数的新强化缓冲算子理论研究

5.1 强化缓冲算子序列

刘思峰、党耀国等教授在其专著《灰色系统理论及其应用》中构造了下列强化缓冲算子，设 $X = (x(1), x(2), \cdots, x(n))$ 为系统行为数据序列，令

$$XD_i = (x(1)d_i, \cdots, x(n)d_i), i = 1,2,$$

其中

$$x(k)d_1 = \frac{(w_k + \cdots + w_n)x^2(k)}{w_k x(k) + \cdots + w_n x(n)},$$

$$x(k)d_2 = \frac{x^2(k)}{[x^{w_k}(k) \times \cdots \times x^{w_n}(n)]^{\frac{1}{w_k + \cdots + w_n}}}, k = 1,2,\cdots,n,$$

则当 X 为单调增长序列、单调衰减序列或振荡序列时，D_1、D_2 皆为强化缓冲算子.

在此，我们在强化缓冲算子 D_1、D_2 的基础上，利用单调函数理论构建新的强化缓冲算子.

定理 5.1 设 $X = (x(1), x(2), \cdots, x(n))$ 为系统行为数据序列，且 $x(i) > 0$,

$f>0, w_i>0$. 权重向量 $w=(w_1,\cdots,w_n)$，f 为严格单调递增(或递减)函数，g 为其反函数. 令

$$XD_3=(x(1)d_3,\cdots,x(n)d_3),$$

其中

$$x(k)d_3=g\left\{\frac{(w_k+\cdots+w_n)f^2(x(k))}{w_kf(x(k))+\cdots+w_nf(x(n))}\right\}, k=1,2,\cdots,n,$$

则当 X 为单调增长序列、单调衰减序列或振荡序列时，D_3 为强化缓冲算子.

证明: 容易验证

$$x(n)d_3=g\left\{\frac{w_nf^2(x(n))}{w_nf(x(n))}\right\}=x(n),$$

即 D_3 满足缓冲算子公理一.

至于缓冲算子公理二、公理三，D_3 显然满足. 因而，D_3 为缓冲算子.

假设 f 为严格单调递增函数.

(1)当 X 为单调增长序列时，有

$$0<x(k)\leqslant\cdots\leqslant x(n),$$

则

$$0<f(x(k))\leqslant\cdots\leqslant f(x(n)),$$

$$0<(w_k+\cdots+w_n)f(x(k))\leqslant w_kf(x(k))+\cdots+w_nf(x(n)),$$

$$0<\frac{(w_k+\cdots+w_n)f^2(x(k))}{w_kf(x(k))+\cdots+w_nf(x(n))}\leqslant f(x(k)),$$

$$x(k)d_3=g\left\{\frac{(w_k+\cdots+w_n)f^2(x(k))}{w_kf(x(k))+\cdots+w_nf(x(n))}\right\}\leqslant g(f(x(k)))=x(k).$$

所以，D_3 为强化缓冲算子.

(2)当 X 为单调衰减序列时，有

$$x(k)\geqslant\cdots\geqslant x(n)>0,$$

则

$$f(x(k))\geqslant\cdots\geqslant f(x(n))>0,$$

$$(w_k+\cdots+w_n)f(x(k))\geqslant w_kf(x(k))+\cdots+w_nf(x(n))>0,$$

$$\frac{(w_k+\cdots+w_n)f^2(x(k))}{w_kf(x(k))+\cdots+w_nf(x(n))}\geqslant f(x(k))>0,$$

$$x(k)d_3=g\left\{\frac{(w_k+\cdots+w_n)f^2(x(k))}{w_kf(x(k))+\cdots+w_nf(x(n))}\right\}\geqslant g(f(x(k)))=x(k).$$

所以，D_3 为强化缓冲算子.

(3)当 X 为振荡序列时，令

$$x(k)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}x(i),x(h)=\min_{1\leqslant i\leqslant n}x(i),$$

对任意 $i\in\{1,2,,\cdots,n\}$，有

$$x(k)\geqslant x(i),\cdots,x(n);x(h)\leqslant x(i),\cdots,x(n).$$

$$f(x(k))\geqslant f(x(i)),\cdots,f(x(n))>0,$$

$$0<f(x(h))\leqslant f(x(i)),\cdots,f(x(n)),$$

则

$$0<w_kf(x(k))+\cdots+w_nf(x(n))\leqslant(w_k+\cdots+w_n)f(x(k)),$$

$$0<(w_h+\cdots+w_n)f(x(h))\leqslant w_hf(x(h))+\cdots+w_nf(x(n)).$$

$$\frac{(w_k+\cdots+w_n)f^2(x(k))}{w_kf(x(k))+\cdots+w_nf(x(n))}\geqslant f(x(k))>0,$$

$$x(k)d_3-g\left\{\frac{(w_k+\cdots+w_n)f^2(x(k))}{w_kf(x(k))+\cdots+w_nf(x(n))}\right\}\geqslant g(f(x(k)))=x(k)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}x(i);$$

$$0<\frac{(w_h+\cdots+w_n)f^2(x(h))}{w_hf(x(h))+\cdots+w_nf(x(n))}\leqslant f(x(h)),$$

$$x(h)d_3-g\left\{\frac{(w_h+\cdots+w_n)f^2(x(h))}{w_hf(x(h))+\cdots+w_nf(x(n))}\right\}\leqslant g(f(x(h)))=x(h)-\min_{1\leqslant i\leqslant n}x(i);$$

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}x(i)d_3\geqslant x(k)d_3\geqslant x(k)-\max_{1\leqslant i\leqslant n}x(i),$$

$$\min_{1\leqslant i\leqslant n}x(i)d_3\leqslant x(h)d_3\leqslant x(h)=\min_{1\leqslant i\leqslant n}x(i).$$

故 D_3 为强化缓冲算子.

同理可证，当 f 为严格单调递减函数时，D_3 也为强化缓冲算子.

定理 5.2 设 $X-(x(1),x(2),\cdots,x(n))$ 为系统行为数据序列，且 $x(i)>0$，$f>0,w_i>0$. 权重向量 $w=(w_1,\cdots,w_n)$，f 为严格单调递增(或递减)函数，

g 为其反函数. 令

$$XD_4=(x(1)d_4,\cdots,x(n)d_4),$$

其中

$$x(k)d_4=g\left\{\frac{f^2(x(k))}{[f^{w_k}(x(k))\times\cdots\times f^{w_n}(x(n))]^{\frac{1}{w_k+\cdots+w_n}}}\right\},k=1,2,\cdots,n,$$

则当 X 为单调增长序列、单调衰减序列或振荡序列时，D_4 为强化缓冲算子.

证明:容易验证

$$x(n)d_4=g\left\{\frac{f^2(x(n))}{[f^{w_n}(x(n))]^{\frac{1}{w_n}}}\right\}=x(n),$$

即 D_4 满足缓冲算子公理一.

至于缓冲算子公理二、公理三，D_4 显然满足. 因而，D_4 为缓冲算子.

假设 f 为严格单调递增函数.

(1)当 X 为单调增长序列时，有

$$0<x(k)\leqslant\cdots\leqslant x(n),$$

则

$$0<f(x(k))\leqslant\cdots\leqslant f(x(n)),$$

$$0<f(x(k))\leqslant[f^{w_k}(x(k))\times\cdots\times f^{w_n}(x(n))]^{\frac{1}{w_k+\cdots+w_n}},$$

$$0<\frac{f^2(x(k))}{[f^{w_k}(x(k))\times\cdots\times f^{w_n}(x(n))]^{\frac{1}{w_k+\cdots+w_n}}}\leqslant f(x(k)),$$

$$x(k)d_4=g\left\{\frac{f^2(x(k))}{[f^{w_k}(x(k))\times\cdots\times f^{w_n}(x(n))]^{\frac{1}{w_k+\cdots+w_n}}}\right\}\leqslant g(f(x(k)))=x(k).$$

所以，D_4 为强化缓冲算子.

(2)当 X 为单调衰减序列时，有

$$x(k)\geqslant\cdots\geqslant x(n)>0,$$

则

$$f(x(k))\geqslant\cdots\geqslant f(x(n))>0,$$

$$f(x(k))\geqslant[f^{w_k}(x(k))\times\cdots\times f^{w_n}(x(n))]^{\frac{1}{w_k+\cdots+w_n}}>0,$$

$$\frac{f^2(x(k))}{[f^{w_k}(x(k))\times\cdots\times f^{w_n}(x(n))]^{\frac{1}{w_k+\cdots+w_n}}}\geqslant f(x(k))>0,$$

$$x(k)d_4=g\left\{\frac{f^2(x(k))}{[f^{w_k}(x(k))\times\cdots\times f^{w_n}(x(n))]^{\frac{1}{w_k+\cdots+w_n}}}\right\}\geqslant g(f(x(k)))-x(k).$$

所以，D_4 为强化缓冲算子.

(3)当 X 为振荡序列时，令

$$x(k)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}x(i),x(h)=\min_{1\leqslant i\leqslant n}x(i),$$

对任意 $i\in\{1,2,,\cdots,n\}$，有

$$x(k)\geqslant x(i),\cdots,x(n);x(h)\leqslant x(i),\cdots,x(n).$$

$$f(x(k))\geqslant f(x(i)),\cdots,f(x(n))>0,$$

$$0<f(x(h))\leqslant f(x(i)),\cdots,f(x(n)),$$

则

$$0<[f^{w_k}(x(k))\times\cdots\times f^{w_n}(x(n))]^{\frac{1}{w_k+\cdots+w_n}}\leqslant f(x(k)),$$

$$0<f(x(h))\leqslant[f^{w_h}(x(h))\times\cdots\times f^{w_n}(x(n))]^{\frac{1}{w_h+\cdots+w_n}}.$$

$$\frac{f^2(x(k))}{[f^{w_k}(x(k))\times\cdots\times f^{w_n}(x(n))]^{\frac{1}{w_k+\cdots+w_n}}}\geqslant f(x(k))>0,$$

$$x(k)d_4\geqslant g(f(x(k)))=x(k);$$

$$0<\frac{f^2(x(h))}{[f^{w_h}(x(h))\times\cdots\times f^{w_n}(x(n))]^{\frac{1}{w_h+\cdots+w_n}}}\leqslant f(x(h)),$$

$$x(h)d_4\leqslant g(f(x(h)))=x(h);$$

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}x(i)d_4\geqslant x(k)d_4\geqslant x(k)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}x(i),$$

$$\min_{1\leqslant i\leqslant n}x(i)d_4\leqslant x(h)d_4\leqslant x(h)=\min_{1\leqslant i\leqslant n}x(i).$$

故 D_4 为强化缓冲算子.

同理可证，当 f 为严格单调递减函数时，D_4 也为强化缓冲算子.

定理 5.3 设 $X=(x(1),x(2),\cdots,x(n))$ 为系统行为数据序列，且 $x(i)>0$，$f>0,w_i>0,w_i'>0$. 权重向量分别为 $w-(w_1,\cdots,w_n)$ 和 $w'=(w_1',\cdots,w_n')$，

其中 $w_n \neq 0, w'_n \neq 0$. 若 $\frac{w_i}{w_{i-1}} \geqslant \frac{w'_i}{w'_{i-1}}$，即

$$w_i w'_{i-1} \geqslant w_{i-1} w'_i, i = 2, \cdots, n.$$

f 为严格单调递增(或递减)函数，g 为其反函数，则：

(1)当 X 为单调增长序列时，有

$$g\left(\frac{\sum_{i=k}^{n} w_i f^2(x(k))}{\sum_{i=k}^{n} w_i f(x(i))}\right) \leqslant g\left(\frac{\sum_{i=k}^{n} w'_i f^2(x(k))}{\sum_{i=k}^{n} w'_i f(x(i))}\right);$$

(2)当 X 为单调递减序列时，有

$$g\left(\frac{\sum_{i=k}^{n} w_i f^2(x(k))}{\sum_{i=k}^{n} w_i f(x(i))}\right) \geqslant g\left(\frac{\sum_{i=k}^{n} w'_i f^2(x(k))}{\sum_{i=k}^{n} w'_i f(x(i))}\right).$$

证明：假设 f 为严格单调递增函数，则 g 也为严格单调递增函数. 欲证

$$g\left(\frac{\sum_{i=k}^{n} w_i f^2(x(k))}{\sum_{i=k}^{n} w_i f(x(i))}\right) \leqslant g\left(\frac{\sum_{i=k}^{n} w'_i f^2(x(k))}{\sum_{i=k}^{n} w'_i f(x(i))}\right),$$

则只需证明

$$\frac{\sum_{i=k}^{n} w_i f^2(x(k))}{\sum_{i=k}^{n} w_i f(x(i))} \leqslant \frac{\sum_{i=k}^{n} w'_i f^2(x(k))}{\sum_{i=k}^{n} w'_i f(x(i))},$$

考虑 $\sum_{i=k}^{n} w'_i \sum_{i=k}^{n} w_i f(x(i)) - \sum_{i=k}^{n} w_i \sum_{i=k}^{n} w'_i f(x(i))$ 的符号.

通过计算，有

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=k}^{n} w'_i \sum_{i=k}^{n} w_i f(x(i)) - \sum_{i=k}^{n} w_i \sum_{i=k}^{n} w'_i f(x(i)) \\
&= [w'_k w_k f(x(k)) + w'_k w_{k+1} f(x(k+1)) + \cdots + w'_k w_n f(x(n)) + w'_{k+1} w_k f(x(k)) \\
&\quad + \cdots + w'_n w_k f(x(k)) + w'_n w_{k+1} f(x(k+1)) + \cdots + w'_n w_n f(x(n))]
\end{aligned}$$

$$-[w_k w'_k f(x(k)) + w_k w'_{k+1} f(x(k+1)) + \cdots + w_k w'_n f(x(n)) + w_{k+1} w'_k f(x(k))$$
$$+ \cdots + w_n w'_k f(x(k)) + w_n w'_{k+1} f(x(k+1)) + \cdots + w_n w'_n f(x(n))]$$
$$= \sum_{i=k}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} (w_j w'_i - w'_j w_i)(f(x(j)) - f(x(i))). \qquad (*)$$

由

$$\frac{w_i}{w_{i-1}} \geqslant \frac{w'_i}{w'_{i-1}}, i = 2,3,\cdots,n,$$

得

$$w_j \geqslant w'_j \times \frac{w_{j-1}}{w'_{j-1}}, w_{j-1} \geqslant w'_{j-1} \times \frac{w_{j-2}}{w'_{j-2}},$$

故

$$w_j \geqslant w'_j \times \frac{w_{j-2}}{w'_{j-2}} \geqslant w'_j \times \frac{w_{j-3}}{w'_{j-3}} \geqslant \cdots \geqslant w'_j \times \frac{w_i}{w'_i}, j > i.$$

则

$$(w_j w'_i - w_i w'_j) \geqslant 0, j > i.$$

(1)当 X 为单调增长序列时,有

$$(x(j) - x(i)) \geqslant 0, j > i.$$

又因 f 为严格单调递增函数,则

$$(f(x(j)) - f(x(i))) \geqslant 0, j > i.$$

由(*)式知,

$$\sum_{i=k}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} (w_j w'_i - w'_j w_i)(f(x(j)) - f(x(i))) \geqslant 0,$$

故

$$\frac{\sum_{i=k}^{n} w_i f^2(x(k))}{\sum_{i=k}^{n} w_i f(x(i))} \leqslant \frac{\sum_{i=k}^{n} w'_i f^2(x(k))}{\sum_{i=k}^{n} w'_i f(x(i))}.$$

又因 g 为严格单调递增函数，则

$$g\left(\frac{\sum_{i=k}^{n}w_i f^2(x(k))}{\sum_{i=k}^{n}w_i f(x(i))}\right)\leqslant g\left(\frac{\sum_{i=k}^{n}w'_i f^2(x(k))}{\sum_{i=k}^{n}w'_i f(x(i))}\right).$$

(2)当 X 为单调递减序列时，有

$$(x(j)-x(i))\leqslant 0, j>i.$$

又因 f 为严格单调递增函数，则

$$(f(x(j))-f(x(i)))\leqslant 0, j>i.$$

由(*)式知，

$$\sum_{i=k}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}(w_j w'_i - w'_j w_i)(f(x(j))-f(x(i)))\leqslant 0,$$

故

$$\frac{\sum_{i=k}^{n}w_i f^2(x(k))}{\sum_{i=k}^{n}w_i f(x(i))}\geqslant\frac{\sum_{i=k}^{n}w'_i f^2(x(k))}{\sum_{i=k}^{n}w'_i f(x(i))}.$$

又因 g 为严格单调递增函数，则

$$g\left(\frac{\sum_{i=k}^{n}w_i f^2(x(k))}{\sum_{i=k}^{n}w_i f(x(i))}\right)\geqslant g\left(\frac{\sum_{i=k}^{n}w'_i f^2(x(k))}{\sum_{i=k}^{n}w'_i f(x(i))}\right).$$

定理 5.4　设 $X=(x(1),x(2),\cdots,x(n))$ 为系统行为数据序列，且 $x(i)>0$，$f>0, w_i>0, w'_i>0$．权重向量分别为 $w=(w_1,\cdots,w_n)$ 和 $w'=(w'_1,\cdots,w'_n)$，其中 $w_n\neq 0, w'_n\neq 0$. 若 $\frac{w_i}{w_{i-1}}\geqslant\frac{w'_i}{w'_{i-1}}$，即

$$w_i w'_{i-1}\geqslant w_{i-1}w'_i, i=2,\cdots,n.$$

f 为严格单调递增(或递减)函数，g 为其反函数，则：

(1)当 X 为单调增长序列时,有

$$g\left(\frac{f^2(x(k))}{\left[\prod_{i=k}^{n} f^{w_i}(x(i))\right]^{\frac{1}{w_k+\cdots+w_n}}}\right) \leqslant g\left(\frac{f^2(x(k))}{\left[\prod_{i=k}^{n} f^{w_i'}(x(i))\right]^{\frac{1}{w_k'+\cdots+w_n'}}}\right);$$

(2)当 X 为单调递减序列时,有

$$g\left(\frac{f^2(x(k))}{\left[\prod_{i=k}^{n} f^{w_i}(x(i))\right]^{\frac{1}{w_k+\cdots+w_n}}}\right) \geqslant g\left(\frac{f^2(x(k))}{\left[\prod_{i=k}^{n} f^{w_i'}(x(i))\right]^{\frac{1}{w_k'+\cdots+w_n'}}}\right).$$

证明:先对函数 g 内部的表达式两边取对数,再进行推理、证明,其推导过程与定理 5.3 类似,最后再由 g 为严格单调递增(或递减)函数,即可得到结论.

5.2 实例分析

以人均电力消费量(单位:千瓦时)为例来验证强化缓冲算子在 GM(1,1) 预测过程中的作用. 选取 2000～2006 年中国人均电力消费量作为原始数据序列,2000～2006 年中国人均电力消费量如表 5.1 所示.

表 5.1　中国人均电力消费量(单位:千瓦时)

年份	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
人均电力消费量	132.4	144.6	156.3	173.7	190.2	216.7	249.4

目前,中国处在经济发展的工业化进程中,经济的发展对电力的依赖比较大. 自从 2000 年以来,中国克服了亚洲金融危机的影响,政府采取了积极的财政政策和稳健的货币政策,为经济增长注入了活力,引起了电力需求的激增. 因此,本文以 2000～2005 年中国人均电力消费量的原始数据序列作为建模数据,2006 年的数据作为模型检验数据. 计算得,人均电力消费量环比增长率依次为: 9.215%、8.091%、11.132%、9.499、13.933%、15.090%,年平均增长率为 9.468%. 对原始数据序列进行准光滑性检验,计算可得,当 $t \geqslant 2003$ 时,光滑比

分别为：0.401、0.313、0.272、0.246，均在 (0,0.5) 内，且光滑比递减，满足准光滑性条件. 因此，原始序列的一次累加生成序列具有准指数规律[1]. 但是明显看出，原始序列前半部分增长速度较慢，而后半部分增长速度较快. 因此，最好对原始数据序列进行平滑处理，以削弱冲击扰动因素的干扰，凸显数据的规律性.

为此，取 $f(x)=g(x)-x$ 来构造缓冲算子，以本章构造的缓冲算子对原始数据进行二阶强化处理，建立预测模型，并和原始数据序列直接建模进行比较，见表 5.2.

表 5.2　GM(1,1)模型的预测值及相对误差

序列	GM(1,1)模型	预测值	预测相对误差/%
X	$\hat{x}(2000+t)=1317.848e^{0.102t}-1185.448$	236.831	5.040
XD_1^2	$\hat{x}(2000+t)=680.586e^{0.152t}-569.765$	237.499	4.772
XD_2^2	$\hat{x}(2000+t)=821.431e^{0.138t}-706.111$	241.210	3.284

由表 5.2 知，原始数据序列经过强化缓冲算子 D_1、D_2 二次作用后，所得到的强化缓冲序列都比原始数据序列直接建模的预测相对误差小，其中 D_2 作用后得到的二阶强化缓冲序列的预测相对误差最小，预测值为 241.210，比较逼近观测值 249.4，一步预测相对误差只有 3.284%，预测精度较高.

取 $f(x)=x^2, g(x)=x^{0.5}$ 来构造缓冲算子，以本章构造的缓冲算子对原始数据进行二阶强化处理，建立预测模型，并和原始数据序列直接建模进行比较，见表 5.3.

表 5.3　GM(1,1)模型的预测值及相对误差

序列	GM(1,1)模型	预测值	预测相对误差/%
X	$\hat{x}^{(1)}(k+1)=9210.11e^{0.0535k}-8714.21$	236.831	5.040
XD_3^2	$\hat{x}(k+1)=883.42e^{0.1315k}-765.72$	239.8	3.84
XD_4^2	$\hat{x}(k+1)-8491.94e^{0.185k}-399.44$	252.7	1.36

由表 5.3 知，原始数据序列经过强化缓冲算子 D_3 、D_4 二次作用后，所得到的强化缓冲序列都比原始数据序列直接建模的预测相对误差小，其中 D_4 作用后得到的二阶强化缓冲序列的预测相对误差最小，预测值为 252.7，比较逼近观测值 249.4，一步预测相对误差只有 1.36%，预测精度较高.

第 6 章 缓冲算子性质研究

6.1 缓冲算子的性质

定理 6.1 设 $X=(x(1),x(2),\cdots,x(n))$ 为非负的系统行为数据序列，且 $x(i)>0, f>0$，f 为严格单调递增函数，g 为其反函数. 若 d 是由 $x(1),\cdots,x(k),\cdots,x(n)$ 所组成的强化缓冲算子，在 d 中，用 $f(x(k))$ 替换 $x(k)(k=1,\cdots,n)$，对所得到的表达式用函数 g 去作用，则新表达式 e 也为强化缓冲算子.

证明：因为 d 为强化缓冲算子，则

$$x(n)d=x(n),$$
$$f(x(n))d=f(x(n)),$$

则

$$x(n)e=g\{f(x(n))d\}=g(f(x(n)))=x(n),$$

即 e 满足缓冲算子公理一.

至于缓冲算子公理二、公理三，e 显然满足. 因而，e 为缓冲算子.

假设 f 为严格单调递增函数，下证：

(1)当 X 为单调增长序列时,有

$$0 < x(k) \leqslant \cdots \leqslant x(n),$$

得

$$0 < f(x(k)) \leqslant \cdots \leqslant f(x(n)).$$

由 d 为强化缓冲算子,得

$$x(k)d \leqslant x(k),$$

故

$$f(x(k))d \leqslant f(x(k)).$$

又 g 为严格单调递增函数,则有

$$x(k)e = g(f(x(k))d) \leqslant g(f(x(k))) = x(k),$$

所以 e 为强化缓冲算子.

(2)当 X 为单调衰减序列时,有

$$x(k) \geqslant \cdots \geqslant x(n) > 0,$$

得

$$f(x(k)) \geqslant \cdots \geqslant f(x(n)) > 0.$$

由 d 为强化缓冲算子,得

$$x(k)d \geqslant x(k),$$

故

$$f(x(k))d \geqslant f(x(k)).$$

又 g 为严格单调递增函数,则有

$$x(k)e = g(f(x(k))d) \geqslant g(f(x(k))) = x(k),$$

所以 e 为强化缓冲算子.

(3)当 X 为振荡序列时,令

$$x(k) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} x(i), x(h) = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} x(i),$$

$$x(k) \geqslant x(1), \cdots, x(n); x(h) \leqslant x(1), \cdots, x(n),$$

$$f(x(k)) \geqslant f(x(1)), \cdots, f(x(n)),$$

$$f(x(h)) \leqslant f(x(1)), \cdots, f(x(n)),$$

$$f(x(k)) = \max_{1\leqslant i\leqslant n} f(x(i)), f(x(h)) = \min_{1\leqslant i\leqslant n} f(x(i)).$$

由 d 为强化缓冲算子，得

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n} x(i) \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} x(i)d, \min_{1\leqslant i\leqslant n} x(i) \geqslant \min_{1\leqslant i\leqslant n} x(i)d,$$

故

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n} f(x(i)) \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} f(x(i))d,$$

$$\min_{1\leqslant i\leqslant n} f(x(i)) \geqslant \min_{1\leqslant i\leqslant n} f(x(i))d.$$

又 g 为严格单调递增函数，则有

$$\begin{aligned}\max_{1\leqslant i\leqslant n} x(i) &= g(\max_{1\leqslant i\leqslant n} f(x(i))) \\ &\leqslant g(\max_{1\leqslant i\leqslant n} f(x(i))d) = \max_{1\leqslant i\leqslant n} g(f(x(i))d) \\ &= \max_{1\leqslant i\leqslant n} x(k)e,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\min_{1\leqslant i\leqslant n} x(i) &= g(\min_{1\leqslant i\leqslant n} f(x(i))) \\ &\geqslant g(\min_{1\leqslant i\leqslant n} f(x(i))d) = \min_{1\leqslant i\leqslant n} g(f(x(i))d) \\ &= \min_{1\leqslant i\leqslant n} x(k)e.\end{aligned}$$

所以 e 为强化缓冲算子.

定理 6.2 设 $X = (x(1), x(2), \cdots, x(n))$ 为非负的系统行为数据序列，且 $x(i) > 0, f > 0$，f 为严格单调递增函数，g 为其反函数. 若 d 是由 $x(1), \cdots, x(k), \cdots, x(n)$ 所组成的弱化缓冲算子，在 d 中，用 $f(x(k))$ 替换 $x(k)(k = 1, \cdots, n)$，对所得到的表达式用函数 g 去作用，则新表达式 e 也为弱化缓冲算子.

证明：因为 d 为弱化缓冲算子，则

$$x(n)d = x(n),$$

$$f(x(n))d = f(x(n)),$$

$$x(n)e = g\{f(x(n))d\} = g(f(x(n))) = x(n),$$

即 e 满足缓冲算子公理一.

至于缓冲算子公理二、公理三，e 显然满足. 因而，e 为缓冲算子.

假设 f 为严格单调递增函数，下证：

(1)当 X 为单调增长序列时，有

$$0 < x(k) \leqslant \cdots \leqslant x(n),$$

得

$$0 < f(x(k)) \leqslant \cdots \leqslant f(x(n)).$$

由 d 为弱化缓冲算子，得

$$x(k)d \geqslant x(k),$$

故

$$f(x(k))d \geqslant f(x(k)).$$

又 g 为严格单调递增函数，则有

$$x(k)e = g(f(x(k))d) \geqslant g(f(x(k))) = x(k).$$

所以 e 为弱化缓冲算子.

(2)当 X 为单调衰减序列时，有

$$x(k) \geqslant \cdots \geqslant x(n) > 0,$$

得

$$f(x(k)) \geqslant \cdots \geqslant f(x(n)) > 0.$$

由 d 为弱化缓冲算子，得

$$x(k)d \leqslant x(k),$$

故

$$f(x(k))d \leqslant f(x(k)).$$

又 g 为严格单调递增函数，则有

$$x(k)e = g(f(x(k))d) \leqslant g(f(x(k))) = x(k).$$

所以 e 为弱化缓冲算子.

(3)当 X 为振荡序列时，令

$$x(k) = \max_{1\leqslant i\leqslant n} x(i), x(h) = \min_{1\leqslant i\leqslant n} x(i),$$

$$x(k) \geqslant x(1),\cdots,x(n);x(h) \leqslant x(1),\cdots,x(n).$$

$$f(x(k)) \geqslant f(x(1)),\cdots,f(x(n)),$$

$$f(x(h)) \leqslant f(x(1)),\cdots,f(x(n)),$$

$$f(x(k)) = \max_{1\leqslant i\leqslant n} f(x(i)),f(x(h)) = \min_{1\leqslant i\leqslant n} f(x(i)).$$

由 d 为弱化缓冲算子,得

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n} x(i) \geqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} x(i)d,\min_{1\leqslant i\leqslant n} x(i) \leqslant \min_{1\leqslant i\leqslant n} x(i)d,$$

故

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n} f(x(i)) \geqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} f(x(i))d,$$

$$\min_{1\leqslant i\leqslant n} f(x(i)) \leqslant \min_{1\leqslant i\leqslant n} f(x(i))d.$$

又 g 为严格单调递增函数,

$$\begin{aligned}\max_{1\leqslant i\leqslant n} x(i) &= g(\max_{1\leqslant i\leqslant n} f(x(i)))\\ &\geqslant g(\max_{1\leqslant i\leqslant n} f(x(i))d) = \max_{1\leqslant i\leqslant n} g(f(x(i))d)\\ &= \max_{1\leqslant i\leqslant n} x(k)e,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\min_{1\leqslant i\leqslant n} x(i) &= g(\min_{1\leqslant i\leqslant n} f(x(i)))\\ &\leqslant g(\min_{1\leqslant i\leqslant n} f(x(i))d) = \min_{1\leqslant i\leqslant n} g(f(x(i))d)\\ &= \min_{1\leqslant i\leqslant n} x(k)e.\end{aligned}$$

所以 e 为弱化缓冲算子.

6.2　实例分析

【实例 1】　某企业开发出一种新产品,其月销售额如表 6.1 所示.

表 6.1　新产品的月销售额(单位:万元)

月　份	1	2	3	4	5	6	7
销售额	60.8	62.6	65.7	70.4	77.4	86.7	98.6

由表 6.1 可以计算出该企业新产品各月销售额的增长率分别为 2.96%，4.95%，7.12%，9.94%，12.01%，11.65%. 由此可以看出，原始数据序列前半部分的增长速度明显慢于后半部分的增长速度. 通过统计分析发现，该企业从 3 月份开始采取了一系列促销手段，所以从 4 月份开始该新产品的月销售额增长率比 1～3 月份有了明显的增长. 因此，为了提高 8 月份及其以后月份的销售额预测精度，需要利用强化缓冲算子对原始数据序列进行强化作用，以消除促销手段对原始数据序列的冲击扰动.

下面用前 6 个月的销售额为建模数据，并预测 7 月份的销售额. 为了提高 GM(1,1)模型的预测精度，必须对原始数据序列进行强化处理，用强化缓冲算子对原始数据序列进行强化处理，使得预测结果与实际情况更为接近.

利用强化算子(这里取 $f(x)=x^2$，则其反函数 $g(x)=\sqrt{x}$)对原始数据序列进行一阶强化处理，得到强化数据序列为

$$X_1=(51.95,53.64,57.20,63.18,72.90,87.6).$$

表 6.2　两种情况 GM(1,1)模型

序列	预测值	预测相对误差
直接建模	92.62	−4.3%
XE	96.66	−0.14%

表 6.3　基于强化缓冲算子的建模误差检验表

序　号	实际数据	模拟数据	相对误差
1	53.64	50.56	−5.58%
2	57.20	57.64	0.76%
3	63.18	65.60	3.82%
4	72.90	74.64	2.39%
5	87.60	84.94	−3.04%
6	96.80	96.66	−0.14%

7 月份的预测销售额为 96.66，与实际的 98.6 相差不多，相对误差仅为 0.14%，比直接建模的预测精度高.

【实例 2】 1997 年以后，随着亚洲金融危机对我国的影响逐步减弱，以及国家扩张性财政政策的有效实施和消费结构的升级，2002 年我国 GDP 已突破 10 万亿元大关，经济发展进入新一轮的增长周期. 从 2003 年开始，能源消耗量急剧增长，1998～2006 年我国能源消耗总量的原始数据如表 6.4 所示.

表 6.4 1998～2006 年我国能源消耗总量(单位：亿吨)

年　份	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
耗能总量	13.22	13.38	13.86	14.32	15.18	17.50	20.32	22.47	24.63

由表 6.4 可计算出，1999～2006 年我国能源消耗增长速度分别为：1.2%，3.5%，3.4%，6.1%，15.3%，16.1%，10.6%，9.6%. 2003 年以前的增长速度显著慢于后半部分的增长速度. 如果直接基于原始数据进行建模，则 2003～2006 年的平均预测误差竟高达－80%以上，这样的结果是不能接受的. 为了及时准确地把握能源消耗的发展趋势，对能源需求进行科学合理的预测，必须对缓慢增长的数据加以处理，使其符合 2002 年后的发展趋势，在此基础上进行合理的预测.

下面以前 8 年的数据作为建模数据，并预测 2006 年的消耗量. 为了提高 GM(1,1)模型的预测精度，必须对原始数据序列进行强化处理，用强化缓冲算子对原始数据序列进行强化处理，使得预测结果与实际情况更为接近.

利用强化算子(这里取 $f(x)=x^2$，则其反函数 $g(x)=\sqrt{x}$)对原始数据序列进行一阶强化处理，得到强化数据序列为

$$X_1=(10.53,10.51,10.94,11.26,12.08,15.16,19.27,22.47).$$

表 6.5 两种情况 GM(1,1)模型

序列	预测值	预测相对误差
直接建模	24.09	−2.2%
XE	24.99	1.5%

表 6.6　基于强化缓冲算子的建模误差检验表

序号	实际数据	模拟数据	相对误差
1	10.51	8.76	−16.68%
2	10.94	10.17	−7.02%
3	11.26	11.82	4.94%
4	12.08	13.73	13.63%
5	15.16	15.95	5.19%
6	19.27	18.52	−3.88%
7	22.47	21.52	−4.25%

2006 年的预测消耗量为 24.99，与实际的 24.63 相差不多，相对误差仅为 1.5%，比直接建模的预测精度高.

第 7 章 基于新信息优先的强化缓冲算子的构造及其应用

7.1 一类新的强化缓冲算子的构造

定理 7.1 设 $X=(x(1),x(2),\cdots,x(n))$ 为系统行为数据序列，$x(k)>0$，$k=1,2,\cdots,n$，其缓冲序列为 $XD_1=(x(1)d_1,x(2)d_1,\cdots,x(n)d_1)$，其中

$$x(k)d_1=x(k)\left[\frac{x(k)}{x(n)}\right]^{\frac{1}{n-k+1}},k=1,2,\cdots,n,$$

则当 X 为单调增长序列、单调衰减序列或振荡序列时，D_1 都为强化缓冲算子.

证明：容易验证，D_1 满足缓冲算子的三个公理，所以 D_1 为缓冲算子. 下证：D_1 为强化缓冲算子.

(1)当 X 为单调增长序列时，则

$$x(k)d_1-x(k)-x(k)\left[\frac{x(k)}{x(n)}\right]^{\frac{1}{n-k+1}}-x(k)$$

$$x(k)\left[\left[\frac{x(k)}{x(n)}\right]^{\frac{1}{n-k+1}}\quad 1\right]\leqslant 0,$$

因此

$$x(k)d_1 \leqslant x(k),$$

由定理 1.1～1.3 知，缓冲算子 D_1 为强化缓冲算子.

(2)当 X 为单调衰减序列时，有

$$x(k)d_1 - x(k) = x(k)\left[\frac{x(k)}{x(n)}\right]^{\frac{1}{n-k+1}} - x(k)$$

$$= x(k)\left[\left[\frac{x(k)}{x(n)}\right]^{\frac{1}{n-k+1}} - 1\right] \geqslant 0,$$

因此

$$x(k)d_1 \geqslant x(k),$$

由定理 1.1～1.3 知，缓冲算子 D_1 为强化缓冲算子.

(3)当 X 为振荡序列时，令

$$x(\alpha) = \max\{x(k) \mid k = 1,2,\cdots,n\},$$

$$x(\beta) = \min\{x(k) \mid k = 1,2,\cdots,n\};$$

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n} x(i)d_1 \geqslant x(\alpha)d_1 = x(\alpha)\left[\frac{x(\alpha)}{x(n)}\right]^{\frac{1}{n-\alpha+1}} \geqslant x(\alpha) = \max_{1\leqslant i\leqslant n} x(i),$$

$$\min_{1\leqslant i\leqslant n} x(i)d_1 \leqslant x(\beta)d_1 = x(\beta)\left[\frac{x(\beta)}{x(n)}\right]^{\frac{1}{n-\beta+1}} \leqslant x(\beta) = \min_{1\leqslant i\leqslant n} x(i).$$

由定理 1.1～1.3 知，缓冲算子 D_1 为强化缓冲算子.

定理 7.2 设 $X = (x(1), x(2), \cdots, x(n))$ 为系统行为数据序列，$x(k) > 0$，$k = 1,2,\cdots,n$，其缓冲序列为 $XD_m = (x(1)d_m, x(2)d_m, \cdots, x(n)d_m)$，$m$ 为自然数，其中

$$x(k)d_m = x(k)\left(\frac{x(k)}{x(n)}\right)^{\frac{m}{n-k+1}}, k = 1,2,\cdots,n,$$

则当 X 为单调增长序列、单调衰减序列或振荡序列时，D_m 都为强化缓冲算子.

证明：容易验证，D_m 满足缓冲算子的三个公理，所以 D_m 为缓冲算子. 下证：D_m 为强化缓冲算子.

(1)当 X 为单调增长序列时,有

$$x(k)d_m - x(k) = x(k)\left(\frac{x(k)}{x(n)}\right)^{\frac{m}{n-k+1}} - x(k)$$

$$= x(k)\left[\left(\frac{x(k)}{x(n)}\right)^{\frac{m}{n-k+1}} - 1\right] \leqslant 0,$$

因此

$$x(k)d_m \leqslant x(k),$$

由定理 1.1～1.3 知,缓冲算子 D_m 为强化缓冲算子.

(2)当 X 为单调衰减序列时,有

$$x(k)d_m - x(k) = x(k)\left(\frac{x(k)}{x(n)}\right)^{\frac{m}{n-k+1}} - x(k)$$

$$= x(k)\left[\left(\frac{x(k)}{x(n)}\right)^{\frac{m}{n-k+1}} - 1\right] \geqslant 0,$$

因此

$$x(k)d_m \geqslant x(k),$$

由定理 1.1～1.3 知,缓冲算子 D_m 为强化缓冲算子.

(3)当 X 为振荡序列时,令

$$x(\alpha) = \max\{x(k) \mid k = 1,2,\cdots,n\},$$

$$x(\beta) = \min\{x(k) \mid k = 1,2,\cdots,n\};$$

$$x(\alpha)d_m = x(\alpha)\left(\frac{x(\alpha)}{x(n)}\right)^{\frac{m}{n-\alpha+1}} \geqslant x(\alpha),$$

$$x(\beta)d_m = x(\beta)\left(\frac{x(\beta)}{x(n)}\right)^{\frac{m}{n-\beta+1}} \leqslant x(\beta),$$

因此

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n} x(i)d_m \geqslant x(\alpha)d_m \geqslant x(\alpha) = \max_{1\leqslant i\leqslant n} x(i),$$

$$\min_{1\leqslant i\leqslant n} x(i)d_m \leqslant x(\beta)d_m \leqslant x(\beta) = \min_{1\leqslant i\leqslant n} x(i).$$

由定理 1.1～1.3 知,缓冲算子 D_m 为强化缓冲算子.

推论 1 当 $m=n-k+1$ 时，得到文献[22]定义的强化缓冲算子，即

$$XD=(x(1)d,x(2)d,\cdots,x(n)d),$$

其中

$$x(k)d=x(k)\frac{x(k)}{x(n)},k=1,2,\cdots,n,$$

则当 X 为单调增长序列、单调衰减序列或振荡序列时，D 皆为强化缓冲算子.

定理 7.3 设 $X=(x(1),x(2),\cdots,x(n))$ 为系统行为数据序列，$x(k)>0$，$k=1,2,\cdots,n$，其缓冲序列为 $XD_2=(x(1)d_2,x(2)d_2,\cdots,x(n)d_2)$，其中

$$x(k)d_2=\frac{x(k)}{n-k+1}\sum_{i=k}^{n}\left(\frac{x(i)}{x(n)}\right)^{\frac{1}{n-k+1}},k=1,2,\cdots,n,$$

则当 X 为单调增长序列或单调衰减序列时，D_2 皆为强化缓冲算子.

证明：容易验证，D_2 满足缓冲算子的三个公理，所以 D_2 为缓冲算子. 下证：D_2 为强化缓冲算子.

(1)当 X 为单调增长序列时，有

$$\begin{aligned}x(k)d_2-x(k)&=\frac{x(k)}{n-k+1}\sum_{i=k}^{n}\left(\frac{x(i)}{x(n)}\right)^{\frac{1}{n-k+1}}-x(k)\\&=\frac{x(k)}{n-k+1}\left\{\left[\left(\frac{x(k)}{x(n)}\right)^{\frac{1}{n-k+1}}-1\right]\right.\\&\quad\left.+\left[\left(\frac{x(k+1)}{x(n)}\right)^{\frac{1}{n-k}}-1\right]+\cdots+[1-1]\right\}\leqslant 0,\end{aligned}$$

因此

$$x(k)d_2\leqslant x(k),$$

故 D_2 为强化缓冲算子.

(2)当 X 为单调衰减序列时，有

$$\begin{aligned}x(k)d_2-x(k)&=\frac{x(k)}{n-k+1}\sum_{i=k}^{n}\left(\frac{x(i)}{x(n)}\right)^{\frac{1}{n-k+1}}-x(k)\\&=\frac{x(k)}{n-k+1}\left\{\left[\left(\frac{x(k)}{x(n)}\right)^{\frac{1}{n-k+1}}-1\right]\right.\\&\quad\left.+\left[\left(\frac{x(k+1)}{x(n)}\right)^{\frac{1}{n-k}}-1\right]+\cdots+[1-1]\right\}\geqslant 0,\end{aligned}$$

因此

$$x(k)d_2 \geqslant x(k),$$

故 D_2 为强化缓冲算子.

定理 7.4　设 $X=(x(1),x(2),\cdots,x(n))$ 为系统行为数据序列，$x(k)>0$，$k=1,2,\cdots,n$，其缓冲序列为 $XD_3=(x(1)d_3,x(2)d_3,\cdots,x(n)d_3)$，其中

$$x(k)d_3=\frac{2x(k)}{(n+k)(n-k+1)}\sum_{i=k}^{n} i\left(\frac{x(i)}{x(n)}\right)^{\frac{1}{n-i+1}},k=1,2,\cdots,n,$$

则当 X 为单调增长序列或单调衰减序列时，D_3 皆为强化缓冲算子.

证明:容易验证，D_3 满足缓冲算子的三个公理，所以 D_3 为缓冲算子. 下证：D_3 为强化缓冲算子.

(1)当 X 为单调增长序列时，有

$$\begin{aligned}x(k)d_3-x(k)&=\frac{2x(k)}{(n+k)(n-k+1)}\sum_{i=k}^{n} i\left(\frac{x(i)}{x(n)}\right)^{\frac{1}{n-i+1}}-x(k)\\&=\frac{2x(k)}{(n+k)(n-k+1)}\left\{k\left[\left(\frac{x(k)}{x(n)}\right)^{\frac{1}{n-k+1}}-1\right]\right.\\&\quad\left.+(k+1)\left[\left(\frac{x(k+1)}{x(n)}\right)^{\frac{1}{n-k}}-1\right]+\cdots+n[1-1]\right\}\leqslant 0.\end{aligned}$$

因此

$$x(k)d_3\leqslant x(k),$$

故 D_3 为强化缓冲算子.

(2)当 X 为单调衰减序列时，有

$$\begin{aligned}x(k)d_3-x(k)&=\frac{2x(k)}{(n+k)(n-k+1)}\sum_{i=k}^{n} i\left(\frac{x(i)}{x(n)}\right)^{\frac{1}{n-i+1}}-x(k)\\&=\frac{2x(k)}{(n+k)(n-k+1)}\left\{k\left[\left(\frac{x(k)}{x(n)}\right)^{\frac{1}{n-k+1}}-1\right]\right.\\&\quad\left.+(k+1)\left[\left(\frac{x(k+1)}{x(n)}\right)^{\frac{1}{n-k}}-1\right]+\cdots+n[1-1]\right\}\geqslant 0.\end{aligned}$$

因此

$$x(k)d_3\geqslant x(k),$$

故 D_3 为强化缓冲算子.

定理 7.5 设 $X=(x(1),x(2),\cdots,x(n))$ 为系统行为数据序列，$x(k)>0$，$k=1,2,\cdots,n$，其缓冲序列为 $XD_4=(x(1)d_4,x(2)d_4,\cdots,x(n)d_4)$，其中

$$x(k)d_4=x(k)\left[\prod_{i=k}^{n}\left(\frac{x(i)}{x(n)}\right)^{\frac{1}{n-i+1}}\right]^{\frac{1}{n-k+1}},k=1,2,\cdots,n,$$

则当 X 为单调增长序列或单调衰减序列时，D_4 皆为强化缓冲算子.

证明：容易验证，D_4 满足缓冲算子的三个公理，所以 D_4 为缓冲算子. 下证：D_4 为强化缓冲算子.

(1)当 X 为单调增长序列时，有

$$\begin{aligned}x(k)d_4&=x(k)\left[\prod_{i=k}^{n}\left(\frac{x(i)}{x(n)}\right)^{\frac{1}{n-i+1}}\right]^{\frac{1}{n-k+1}}\\&=x(k)\left[\left(\frac{x(k)}{x(n)}\right)^{\frac{1}{n-k+1}}\left(\frac{x(k+1)}{x(n)}\right)^{\frac{1}{n-k}}\cdots1\right]^{\frac{1}{n-k+1}}\leqslant x(k),\end{aligned}$$

因此

$$x(k)d_4\leqslant x(k),$$

故 D_4 为强化缓冲算子.

(2)当 X 为单调衰减序列时，有

$$\begin{aligned}x(k)d_4&=x(k)\left[\prod_{i=k}^{n}\left(\frac{x(i)}{x(n)}\right)^{\frac{1}{n-i+1}}\right]^{\frac{1}{n-k+1}}\\&=x(k)\left[\left(\frac{x(k)}{x(n)}\right)^{\frac{1}{n-k+1}}\left(\frac{x(k+1)}{x(n)}\right)^{\frac{1}{n-k}}\cdots1\right]^{\frac{1}{n-k+1}}\geqslant x(k),\end{aligned}$$

因此

$$x(k)d_4\geqslant x(k),$$

故 D_4 为强化缓冲算子.

从以上的讨论可知，由于强化缓冲算子必须满足不动点公理，即$x(n)d=x(n)$. 因此，当强化缓冲算子作用于单调增长序列时，数据萎缩，即强化缓冲序列的增长速度比原始序列的增长速度减缓；而当其作用于单调衰减序列时，数据膨胀，即强化缓冲序列的衰减速度比原始序列衰减速度减缓. 因此，当原始序列的前半部分增长(衰减)速度较缓，后半部分增长(衰减)速度较快时，可以利用本文

所构造的强化缓冲算子对其作用，将使序列变得比较平缓，并且考虑了“新信息优先”的原则，能够有效地消除冲击扰动对系统数据序列造成的“失真”现象，因而能够提高模型的预测精度.

7.2 实例分析

以人均电力消费量(单位：千瓦时)为例来验证本章所述强化缓冲算子在GM(1,1)预测过程中的作用. 选取2000～2006年中国人均电力消费量作为原始数据序列，如表7.1所示.

表7.1 中国人均电力消费量(单位：千瓦时)

年 份	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
人均电力消费量	132.4	144.6	156.3	173.7	190.2	216.7	249.4

目前，中国处在经济发展的工业化进程中，经济的发展对电力的依赖比较大. 自从2000年以来，中国克服了亚洲金融危机的影响，政府采取了积极的财政政策和稳健的货币政策，为经济增长注入了活力，引起了电力需求的激增. 因此，本节以2000～2005年中国人均电力消费量的原始数据序列作为建模数据，2006年的数据作为模型检验数据. 计算可得，人均电力消费量环比增长率依次为：9.215%、8.091%、11.132%、9.499、13.933%、15.090%，年平均增长率为9.468%. 对原始数据序列进行准光滑性检验，计算可得，当$t \geq 2003$时，光滑比分别为：0.401、0.313、0.272、0.246，均在(0,0.5)内，且光滑比递减，满足准光滑性条件. 因此，原始序列的一次累加生成序列具有准指数规律[1]. 但是明显看出，原始序列前半部分增长速度有点慢，后半部分增长速度较快. 因此，最好对原始数据序列进行平滑处理，以削弱冲击扰动因素的干扰，凸显数据的规律性.

为此，以本章构造的缓冲算子对原始数据进行二阶强化处理，建立预测

模型,如表 7.2 所示.

表 7.2　四种情况 GM(1,1)模型

序列	GM(1,1)模型	预测值	预测相对误差/%
X	$\hat{x}(2000+t)=1317.848e^{0.102t}-1185.448$	236.831	5.040
XD_1^2	$\hat{x}(2000+t) - 680.586e^{0.152t} \quad 569.765$	237.499	4.772
XD_2^2	$\hat{x}(2000+t)=821.431e^{0.138t}-706.111$	241.210	3.284
XD_3^2	$\hat{x}(2000+t)=876.605e^{0.132t} \quad 758.408$	240.118	3.722
XD_4^2	$\hat{x}(2000+t)=817.537e^{0.138t}-702.348$	241.185	3.294

由表 7.2 可知,原始数据序列经过强化缓冲算子 D_1 、D_2 、D_3 和 D_4 作用后,所得到的强化缓冲序列都比原始数据序列直接建模的预测相对误差小,其中经 D_2 作用后得到的二阶强化缓冲序列的预测相对误差最小,预测值为 241.210,比较逼近观测值 249.4,一步预测相对误差只有 3.284%,即预测精度最高.原始数据序列 X 经过三阶强化缓冲算子 D_3 作用后预测值为 240.118,预测误差为 3.722%;原始数据序列 X 经过四阶强化缓冲算子 D_4 作用后预测值 241.185,预测误差为 3.294%.

第 8 章 基于新信息优先的弱化缓冲算子的构造及其应用

8.1 一类新的弱化缓冲算子的构造

定理 8.1 设 $X=(x(1),x(2),\cdots,x(n))$ 为系统行为数据序列，$x(k)>0$，$k=1,2,\cdots,n$，其缓冲序列为 $XD_1=(x(1)d_1,x(2)d_1,\cdots,x(n)d_1)$，其中

$$x(k)d_1=x(k)\left(\frac{x(n)}{x(k)}\right)^{\frac{1}{n-k+1}},k=1,2,\cdots,n,$$

则当 X 为单调增长序列、单调衰减序列或振荡序列时，D_1 皆为弱化缓冲算子.

证明：容易验证，D_1 满足缓冲算子的三个公理，所以 D_1 为缓冲算子. 下证：D_1 为弱化缓冲算子.

(1)当 X 为单调增长序列时，有

$$x(k)d_1-x(k)=x(k)\left(\frac{x(n)}{x(k)}\right)^{\frac{1}{n-k+1}}-x(k)$$

$$=x(k)\left[\left(\frac{x(n)}{x(k)}\right)^{\frac{1}{n-k+1}}-1\right]\geqslant 0,$$

因此

$$x(k)d_1 \geqslant x(k),$$

由定理 1.1～1.3 知，缓冲算子 D_1 为弱化缓冲算子.

(2)当 X 为单调衰减序列时，有

$$x(k)d_1 - x(k) = x(k)\left(\frac{x(n)}{x(k)}\right)^{\frac{1}{n-k+1}} - x(k)$$

$$= x(k)\left[\left(\frac{x(n)}{x(k)}\right)^{\frac{1}{n-k+1}} - 1\right] \leqslant 0,$$

因此

$$x(k)d_1 \leqslant x(k),$$

由定理 1.1～1.3 知，缓冲算子 D_1 为弱化缓冲算子.

(3)当 X 为振荡序列时，设

$$x(\alpha) = \max\{x(k) \mid k = 1,2,\cdots,n\},$$

$$x(\beta) = \min\{x(k) \mid k = 1,2,\cdots,n\}.$$

对任意的 $i \in \{1,2,\cdots,n\}$，有

$$x(i)d_1 = x(i)^{\frac{n-i}{n-i+1}}(x(n))^{\frac{1}{n-i+1}} \leqslant x(\alpha),$$

$$x(i)d_1 = x(i)^{\frac{n-i}{n-i+1}}(x(n))^{\frac{1}{n-i+1}} \geqslant x(\beta).$$

因此

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n}\{x(k)d_1\} \leqslant \max_{1\leqslant k\leqslant n}\{x(k)\},$$

$$\min_{1\leqslant k\leqslant n}\{x(k)d\} \geqslant \min_{1\leqslant k\leqslant n}\{x(k)\},$$

由定理 1.1～1.3 知，缓冲算子 D_1 为弱化缓冲算子.

定理 8.2 设 $X = (x(1), x(2), \cdots, x(n))$ 为系统行为数据序列，$x(k) > 0$，$k = 1,2,\cdots,n$，其缓冲序列为 $XD_2 = (x(1)d_2, x(2)d_2, \cdots, x(n)d_2)$，其中

$$x(k)d_2 = \frac{1}{n-k+1}\sum_{i=k}^{n} x(i)\left(\frac{x(n)}{x(i)}\right)^{\frac{1}{n-i+1}}, k = 1,2,\cdots,n,$$

则当 X 为单调增长序列、单调衰减序列或振荡序列时，D_2 皆为弱化缓冲算子.

证明：容易验证，D_2 满足缓冲算子的三个公理，所以 D_2 为缓冲算子. 下证：D_2 为弱化缓冲算子.

(1)当 X 为单调增长序列时,有

$$x(k)d_2-x(k)=\frac{1}{n-k+1}\sum_{i=k}^{n}x(i)\left(\frac{x(n)}{x(i)}\right)^{\frac{1}{n-i+1}}-x(k)$$

$$=\frac{\left[x(k)\left(\frac{x(n)}{x(k)}\right)^{\frac{1}{n-k+1}}-x(k)\right]+\cdots+\left[x(n)-x(k)\right]}{n-k+1}\geqslant 0,$$

因此

$$x(k)d_2\geqslant x(k),$$

故 D_2 为弱化缓冲算子.

(2)当 X 为单调衰减序列时,有

$$x(k)d_2-x(k)=\frac{1}{n-k+1}\sum_{i=k}^{n}x(i)\left(\frac{x(n)}{x(i)}\right)^{\frac{1}{n-i+1}}-x(k)$$

$$=\frac{\left[x(k)\left(\frac{x(n)}{x(k)}\right)^{\frac{1}{n-k+1}}-x(k)\right]+\cdots+\left[x(n)-x(k)\right]}{n-k+1}\leqslant 0,$$

因此

$$x(k)d_2\leqslant x(k),$$

故 D_2 为弱化缓冲算子.

(3)当 X 为振荡序列时,令

$$x(\alpha)=\max\{x(k)\mid k=1,2,\cdots,n\},$$

$$x(\beta)=\min\{x(k)\mid k=1,2,\cdots,n\}.$$

对任意的 $\gamma\in\{1,2,\cdots,n\}$,有

$$x(\gamma)d_2-x(\alpha)=\frac{1}{n-\gamma+1}\sum_{i=\gamma}^{n}x(i)\left(\frac{x(n)}{x(i)}\right)^{\frac{1}{n-i+1}}-x(\alpha)$$

$$=\frac{\left[x(\gamma)\left(\frac{x(n)}{x(\gamma)}\right)^{\frac{1}{n-\gamma+1}}-x(\alpha)\right]+\cdots+\left[x(n)-x(\alpha)\right]}{n-\gamma+1}$$

$$=\frac{\left[((x(\gamma))^{\frac{n-\gamma}{n-\gamma+1}}(x(n))^{\frac{1}{n-\gamma+1}}-x(\alpha)\right]+\cdots+\left[(x(n)-x(\alpha)\right]}{n-\gamma+1}\leqslant 0,$$

即

$$x(\gamma)d_2 \leqslant x(\alpha),$$

因此

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n}\{x(k)d_2\} \leqslant \max_{1\leqslant k\leqslant n}\{x(k)\}.$$

同理可证

$$x(\gamma)d_2 \geqslant x(\beta),$$

则，

$$\min_{1\leqslant k\leqslant n}\{x(k)d_2\} \geqslant \min_{1\leqslant k\leqslant n}\{x(k)\}.$$

故当 X 为振荡序列时，D_2 为弱化缓冲算子.

定理 8.3 设 $X=(x(1),x(2),\cdots,x(n))$ 为系统行为数据序列，$x(k)>0$，$k=1,2,\cdots,n$，D_1 和 D_2 为弱化缓冲算子，如定理 8.1 和定理 8.2 所述，则

(1)当 X 为单调增长序列时，

$$x(k)d_1 \leqslant x(k)d_2,\ \forall k \in \{1,2,\cdots,n\};$$

(2)当 X 为单调衰减序列时，

$$x(k)d_1 \geqslant x(k)d_2,\ \forall k \in \{1,2,\cdots,n\}.$$

证明：(1)当 X 为单调增长序列时，对 $\forall k \in \{1,2,\cdots,n-1\}$，有

$$\frac{x(k+1)d_1}{x(k)d_1} = \frac{x(k+1)\left(\frac{x(n)}{x(k+1)}\right)^{\frac{1}{n-k}}}{x(k)\left(\frac{x(n)}{x(k)}\right)^{\frac{1}{n-k+1}}}$$

$$\geqslant \frac{x(k+1)\left(\frac{x(n)}{x(k+1)}\right)^{\frac{1}{n-k}}}{x(k)\left(\frac{x(n)}{x(k)}\right)^{\frac{1}{n-k}}}$$

$$=\left(\frac{x(k+1)}{x(k)}\right)^{\frac{n-k-1}{n-k}} \geqslant 1,$$

即 $\{x(k)d_1 \mid k=1,2,\cdots,n\}$ 为递增序列.

$$x(k)d_2 = \frac{1}{n-k+1}\sum_{i=k}^{n} x(i)\left(\frac{x(n)}{x(i)}\right)^{\frac{1}{n-i+1}}$$

$$=\frac{x(k)\left(\frac{x(n)}{x(k)}\right)^{\frac{1}{n-k+1}}+x(k+1)\left(\frac{x(n)}{x(k+1)}\right)^{\frac{1}{n-k}}\cdots+x(n)}{n-k+1}$$

$$\geqslant\frac{x(k)\left(\frac{x(n)}{x(k)}\right)^{\frac{1}{n-k+1}}+\cdots+x(k)\left(\frac{x(n)}{x(k)}\right)^{\frac{1}{n-k+1}}}{n-k+1}$$

$$=x(k)\left(\frac{x(n)}{x(k)}\right)^{\frac{1}{n-k+1}}=x(k)d_1,$$

即

$$x(k)d_1\leqslant x(k)d_2.$$

(2)同理可证,当 X 为单调衰减序列时,有

$$x(k)d_1\geqslant x(k)d_2.$$

定理 8.4　设 $X=(x(1),x(2),\cdots,x(n))$ 为系统行为数据序列,$x(k)>0$,$k=1,2,\cdots,n$,缓冲序列为 $XD_3=(x(1)d_3,x(2)d_3,\cdots,x(n)d_3)$,其中

$$x(k)d_3=\frac{2}{(n+k)(n-k+1)}\sum_{i=k}^{n}ix(i)\left(\frac{x(n)}{x(i)}\right)^{\frac{1}{n-k+1}},k=1,2,\cdots,n,$$

则当 X 为单调增长序列、单调衰减序列或振荡序列时,D_3 皆为弱化缓冲算子.

证明:容易验证,D_3 满足缓冲算子的三个公理,所以 D_3 为缓冲算子.下证:D_3 为弱化缓冲算子.

(1)当 X 为单调增长序列时,有

$$x(k)d_3-x(k)=\frac{2\sum_{i=k}^{n}ix(i)\left(\frac{x(n)}{x(i)}\right)^{\frac{1}{n-k+1}}}{(n+k)(n-k+1)}-x(k)$$

$$=\frac{2\left\{\sum_{i=k}^{n}ix(i)\left(\frac{x(n)}{x(i)}\right)^{\frac{1}{n-k+1}}-\frac{(n+k)(n-k+1)x(k)}{2}\right\}}{(n+k)(n-k+1)}$$

$$=\frac{2\left\{k\left[x(k)\left(\frac{x(n)}{x(k)}\right)^{\frac{1}{n-k+1}}-x(k)\right]+\cdots+n\left[x(n)-x(k)\right]\right\}}{(n+k)(n-k+1)}\geqslant 0,$$

因此,

$$x(k)d_3\geqslant x(k),$$

故 D_3 为弱化缓冲算子.

(2)同理可证，当 X 为单调衰减序列时，有

$$x(k)d_3 \leqslant x(k),$$

故 D_3 为弱化缓冲算子.

(3)当 X 为振荡序列时，令

$$x(\alpha) = \max\{x(k) \mid k = 1,2,\cdots,n\},$$

$$x(\beta) = \min\{\gamma(k) \mid k = 1,2,\cdots,n\},$$

对任意的 $\gamma \in \{1,2,\cdots,n\}$，有

$$\begin{aligned} x(\gamma)d_3 - x(\alpha) &= \frac{2\sum_{i=\gamma}^{n} ix(i)\left(\frac{x(n)}{x(i)}\right)^{\frac{1}{n-i+1}}}{(n+\gamma)(n-\gamma+1)} - x(\alpha) \\ &= \frac{2\left\{\gamma\left[x(\gamma)\left(\frac{x(n)}{x(\gamma)}\right)^{\frac{1}{n-\gamma+1}} - x(\alpha)\right] + \cdots + n\left[x(n) - x(\alpha)\right]\right\}}{(n+\gamma)(n-\gamma+1)} \\ &= \frac{2\{\gamma[(x(\gamma))^{\frac{n-\gamma}{n-\gamma+1}}(x(n))^{\frac{1}{n-\gamma+1}} - x(\alpha)] + \cdots + n[x(n) - x(\alpha)]\}}{(n+\gamma)(n-\gamma+1)} \leqslant 0, \end{aligned}$$

得

$$x(\gamma)d_3 \leqslant x(\alpha).$$

同理可证

$$x(\gamma)d_3 \geqslant x(\beta).$$

故当 X 为振荡序列时，D_3 也为弱化缓冲算子.

定理 8.5 设 $X = (x(1), x(2), \cdots, x(n))$ 为系统行为数据序列，$x(k) > 0$，$k = 1,2,\cdots,n$，D_1 和 D_3 为弱化缓冲算子，如定理 8.1 和定理 8.4 所述，则

(1)当 X 为单调增长序列时，

$$x(k)d_1 \leqslant x(k)d_3,\ \forall k \in \{1,2,\cdots,n\};$$

(2)当 X 为单调衰减序列时，

$$x(k)d_1 \geqslant x(k)d_3,\ \forall k \in \{1,2,\cdots,n\}.$$

证明:(1)当 X 为单调增长序列时，对 $\forall k \in \{1,2,\cdots,n-1\}$，有

$$\frac{x(k+1)d_1}{x(k)d_1} = \frac{x(k+1)\left(\frac{x(n)}{x(k+1)}\right)^{\frac{1}{n-k}}}{x(k)\left(\frac{x(n)}{x(k)}\right)^{\frac{1}{n-k+1}}}$$

$$\geqslant \frac{x(k+1)\left(\frac{x(n)}{x(k+1)}\right)^{\frac{1}{n-k}}}{x(k)\left(\frac{x(n)}{x(k)}\right)^{\frac{1}{n-k}}} = \left(\frac{x(k+1)}{x(k)}\right)^{\frac{n-k-1}{n-k}} \geqslant 1,$$

所以，$\{x(k)d_1 \mid k=1,2,\cdots,n\}$ 为递增序列.

$$x(k)d_3 = \frac{2}{(n+k)(n-k+1)}\sum_{i=k}^{n} ix(i)\left(\frac{x(n)}{x(i)}\right)^{\frac{1}{n-i+1}}$$

$$= \frac{2\left[kx(k)\left(\frac{x(n)}{x(k)}\right)^{\frac{1}{n-k+1}} + (k+1)x(k+1)\left(\frac{x(n)}{x(k+1)}\right)^{\frac{1}{n-k}} + \cdots + nx(n)\right]}{(n+k)(n-k+1)}$$

$$\geqslant \frac{2\left[kx(k)\left(\frac{x(n)}{x(k)}\right)^{\frac{1}{n-k+1}} + (k+1)x(k)\left(\frac{x(n)}{x(k)}\right)^{\frac{1}{n-k+1}} + \cdots + nx(k)\left(\frac{x(n)}{x(k)}\right)^{\frac{1}{n-k+1}}\right]}{(n+k)(n-k+1)}$$

$$= x(k)\left(\frac{x(n)}{x(k)}\right)^{\frac{1}{n-k+1}}$$

$$= x(k)d_1,$$

即

$$x(k)d_1 \leqslant x(k)d_3.$$

(2)同理可证，当 X 为单调衰减序列时，有

$$x(k)d_1 \geqslant x(k)d_3.$$

从以上讨论可知，由于弱化缓冲算子必须满足不动点公理，即 $x(n)d = x(n)$. 因此，当弱化缓冲算子作用于单调增长序列时，数据膨胀，即弱化缓冲序列的增长速度比原始序列的增长速度减缓；而当其作用于单调衰减序列时，数据萎缩，即弱化缓冲序列的衰减速度比原始序列衰减速度减缓. 因此，当原始序列的前半部分增长(衰减)速度较快，后半部分增长(衰减)速度较慢时，可以利用本文

所构造的弱化缓冲算子对其作用，使序列变得比较平缓，并且考虑了"新信息优先"的原则，能够有效地消除冲击扰动对系统数据序列造成的"失真"现象，因而能够提高模型的模拟精度和预测精度.

8.2 实例分析

以中国城镇登记失业人数(单位:万人)为例来验证本章所构造的弱化缓冲算子在GM(1,1)预测过程中的作用. 选取2000～2006年中国城镇登记失业人数作为原始数据序列，如表8.1所示.

表8.1 中国城镇登记失业人数(单位:万人)

年 份	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
失业人数	595	681	770	800	827	839	847

以2000～2005年的数据作为建模数据，2006年的数据作为模型检验数据. 计算可得，城镇登记失业增长率分别为14.454%、13.069%、3.896%、3.375%、1.451%、0.954%，显然前半部分增长速度较快，后半部分增长速度较慢，如果用此数据直接建模、预测，不可取. 经分析，笔者发现原因有二:一方面，20世纪90年代中后期到21世纪初，由于国有企业改革，造成了许多工人下岗;另一方面，由于大中专院校扩大招生规模，为社会培养了许多的大学生，因此，就业压力增大，失业人数也大大增加. 后来，由于中央政府和地方政府陆续出台了许多促进下岗职工再就业和扶持大学生就业的政策，减缓了就业压力，表现为城镇登记失业人数增长减缓. 为了消除原始数据序列受到冲击扰动因素的影响，用缓冲算子对其作用.

以本章所构造的缓冲算子对原始数据进行弱化处理，分别建立预测模型如下:

无缓冲算子作用，由原始数据序列直接建立 GM(1,1)模型：

$$\hat{x}(2000+t)=14912.796e^{0.047t}-14317.796.$$

经缓冲算子 D_1 作用后得到弱化缓冲序列 XD_1，建立 GM(1,1)模型：

$$\hat{x}(2000+t)=19308.681e^{0.038t}-18678.607.$$

经缓冲算子 D_2 作用后得到弱化缓冲序列 XD_2，建立 GM(1,1)模型：

$$\hat{x}(2000+t)=63785.612e^{0.013t}-63017.018.$$

经缓冲算子 D_3 作用后得到弱化缓冲序列 XD_3，建立 GM(1,1)模型：

$$\hat{x}(2000+t)=98293.850e^{0.008t}-97490.980.$$

经无缓冲算子和缓冲算子 D_1、D_2、D_3 分别作用后的缓冲序列所建立的 GM(1,1)模型的平均相对误差和预测值见表 8.2.

表 8.2 四种情况所得的平均相对误差和预测值

序列	平均相对误差(%)	预测值
X	2.64	899
XD_1	2.35	889
XD_2	0.58	854
XD_3	0.26	848

由表 8.2 知，原始数据序列经过弱化缓冲算子 D_1、D_2 和 D_3 作用后，平均相对误差都比原始序列直接建模的平均相对误差小，其中 D_3 作用后得到的弱化缓冲序列的平均相对误差最小，预测值为 848，比较逼近观测值 847.

第 9 章 基于有理插值公式的 GM(1,1)模型背景值的构造及其应用

9.1 GM(1,1)动态预测模型的建模机理

灰色系统理论具有所需样本数据少,不需要计算统计特征量等优点.因此,自 1982 年提出以来得到了研究人员的重视,已经在许多领域,特别是在显著不确定性和缺乏数据信息的领域得到了成功应用.利用 GM(1,1)模型进行预测虽然有许多成功的实例,但同时也存在一些预测误差过大的情况,反映了 GM(1,1)模型的实用性有待提高.因此,对 GM(1,1)模型进行深入地研究,找出影响 GM(1,1)模型精度和适应性的因素,具有非常重要的理论价值和实际意义.文献[3]用实验的方法分析了 GM(1,1)模型的误差特性,文献[4]提出了 GM(1,1)模型中的背景值构造方法是影响其精度和适应性的关键因素.基于古老的连分式理论,笔者给出一种新的有理插值,同时通过仿真例子说明本文所提出的方法的有效性.

GM(1,1)模型是最常用的一种灰色动态预测模型,该模型由一个单变量的一阶微分方程构成.其建模过程如下:

设原始非负数据序列为

$$X^{(0)} = \{x^{(0)}(1), \cdots, x^{(0)}(n)\}, \tag{1}$$

其中 $x^{(0)}(i) > 0, i = 1, \cdots, n$.

对原始数据做一次累加，有

$$X^{(1)} = \{x^{(1)}(1), \cdots, x^{(1)}(n)\}, \tag{2}$$

其中 $x^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^{k} x^{(0)}(i), k = 1, \cdots, n.$

由一阶生成模块 $X^{(1)}$ 建立模型 GM(1,1)，对应的白化微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}x^{(1)}(t)}{\mathrm{d}t} + ax^{(1)}(t) = b, \tag{3}$$

其中 a 和 b 为待辨识常数. 其最小二乘解为

$$\hat{\phi} = (\tilde{a}, \tilde{b}) = (B^T B)^{-1} B^T Y, \tag{4}$$

其中

$$Y = [x^{(0)}(2), \cdots, x^{(0)}(n)]^T,$$

$$B = \begin{bmatrix} -z^{(1)}(2) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -z^{(1)}(n) & 1 \end{bmatrix},$$

$z^{(1)}(k+1) = \frac{1}{2}[x^{(1)}(k) + x^{(1)}(k+1)]$ 为背景值.

方程(3)的离散解为

$$\tilde{x}^{(1)}(k+1) = \left[x^{(1)}(1) - \frac{\tilde{b}}{\tilde{a}}\right]e^{-\tilde{a}k} + \frac{\tilde{b}}{\tilde{a}}. \tag{5}$$

还原的原始数据为

$$\begin{aligned}\tilde{x}^{(0)}(k+1) &= \tilde{x}^{(1)}(k+1) - \tilde{x}^{(1)}(k) \\ &= (1 - e^{-\tilde{a}})\left[x^{(1)}(1) - \frac{\tilde{b}}{\tilde{a}}\right]e^{-\tilde{a}k}.\end{aligned}$$

由公式(4)可知，拟合和预测精度取决于常数 a 和 b，而 a 和 b 的求解则依赖于背景值 $z^{(1)}(k+1)$，背景值 $z^{(1)}(k+1)$ 的值成为直接影响GM(1,1)模型精

度和适应性的关键因素.

9.2 GM(1,1)模型背景值的改进

前面背景值的求法实际上就是数值积分中的梯形公式,而梯形法的误差较大,精度较低,为此我们提出用基于连分式理论的有理插值与广义梯形公式来重构背景值.

定义 9.1[2] 设 $\{a_n\}$,$\{b_n\}$ 为两个实数列,称形如

$$b_0+\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+\cfrac{a_3}{b_3+\cfrac{a_4}{b_4+\cdots}}}} \tag{6}$$

的分式为连分式(continued fractions),记作

$$b_0+\underset{n=1}{\overset{\infty}{K}}(a_n/b_n).$$

而式

$$b_0+\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+\cfrac{a_3}{b_3+\cfrac{a_4}{b_4+\ddots+\cfrac{a_n}{b_n}}}}} \tag{7}$$

称为连分式(6)的 n 次渐近连分式.其运算法则按一般连分式运算,见文献[2].

定义 9.2[2] 下述形式的连分式:

$$b_0+\cfrac{x-x_0}{b_1+\cfrac{x-x_1}{b_2+\ddots+b_{n-1}+\cfrac{x-x_{n-1}}{b_n}+\ddots}} \tag{8}$$

称为 Thiele 型连分式.

定义 9.3[2]　设 $X=\{x_0,x_1,\cdots,x_n,\cdots\}$ 是实平面上一点集，$f(x)$ 是定义在 $G\supset X$ 上的函数，令

$$\varphi[x_i]=f(x_i),i=0,1,2,\cdots,$$

$$\varphi[x_p,x_q]=\frac{x_q-x_p}{\varphi[x_q]-\varphi[x_p]},$$

$$\varphi[x_i,\cdots,x_j,x_k,x_l]=\frac{x_l-x_k}{\varphi[x_i,\cdots,x_j,x_l]-\varphi[x_i,\cdots,x_j,x_k]},$$

称由上述公式确定的 $\varphi[x_0,x_1,\cdots,x_l]$ 为函数 $f(x)$ 在点 $x_0,x_1,\cdots,x_l$ 处的 l 阶逆差商.

定理 9.1[2]　设

$$R_n(x)=\varphi[x_0]+\cfrac{x-x_0}{\varphi[x_0,x_1]+\cfrac{x-x_1}{\varphi[x_0,x_1,x_2]+\ddots+\varphi[x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}]+\cfrac{x-x_{n-1}}{\varphi[x_0,x_1,\cdots,x_{n-1},x_n]}}},\tag{9}$$

其中 $\varphi[x_0,x_1,\cdots,x_k]\neq 0,\infty,k=0,1,\cdots,n$，为 $f(x)$ 在 $x_0,x_1,\cdots,x_k$ 处的 k 阶逆差商，则有

$$R_n(x_i)=f(x_i),i=0,1,\cdots,n,$$

即函数 $R_n(x)$ 为函数 $f(x)$ 在点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 处的有理插值函数.

将积分区间 $[a,b]$ 划分为 m 等份，步长 $h=\dfrac{b-a}{m}$，则广义梯形公式为

$$T_m(f)=h[\frac{1}{2}f(a)+f(a+h)+\cdots+f(a+(m-1)h)+\frac{1}{2}f(b)].$$

基于广义梯形公式的背景值改进法的步骤如下：

(1)取(2)式中的一次累加序列：

$$X^{(1)}=\{x^{(1)}(1),\cdots,x^{(1)}(n)\}.$$

(2)取 $y(k)=k,k=1,2,\cdots,n$，$m=4$（或 $m=8$）.

(3)把 $[y(k),x^{(1)}(k)]$，$k=1,\cdots,n$，作为对应曲线上的等间距点的坐标，

用有理插值函数 $R_n(x)$ 求出以下横坐标

$$y\left(k+\frac{1}{4}\right),y\left(k+\frac{1}{2}\right),y\left(k+\frac{3}{4}\right),k=1,2,\cdots,n-1.$$

(当 $m=4$ 时)对应点的函数值分别为

$$x^{(1)}\left(k+\frac{1}{4}\right),x^{(1)}\left(k+\frac{1}{2}\right),x^{(1)}\left(k+\frac{3}{4}\right),k=1,2,\cdots,n-1.$$

(4)构造背景值:

当 $m=4$ 时,有

$$z_1^{(1)}(k+1)=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}x^{(1)}(k)+x^{(1)}\left(k+\frac{1}{4}\right)+x^{(1)}\left(k+\frac{1}{2}\right)+x^{(1)}\left(k+\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{2}x^{(1)}(k+1)\right],$$

当 $m=8$ 时,有

$$z_2^{(1)}(k+1)=\frac{1}{8}\left[\frac{1}{2}x^{(1)}(k)+x^{(1)}\left(k+\frac{1}{8}\right)+x^{(1)}\left(k+\frac{1}{4}\right)+x^{(1)}\left(k+\frac{3}{8}\right)+x^{(1)}\left(k+\frac{1}{2}\right)+x^{(1)}\left(k+\frac{5}{8}\right)+x^{(1)}\left(k+\frac{3}{4}\right)+x^{(1)}\left(k+\frac{7}{8}\right)+\frac{1}{2}x^{(1)}(k+1)\right],$$

或组合公式

$$z_3^{(1)}(k+1)=\frac{4}{3}z_2^{(1)}(k+1)-\frac{1}{3}z_1^{(1)}(k+1).$$

9.3 实例分析

【实例 1】 以我国人均能源消耗量的预测为例,比较本文与文献[5]模型的模拟预测精度,数据来源于《中国统计年鉴》. 以 1998～2004 年的数据建模,预测 2005,2006,2007 年的数据,结果如表 9.1 所示. 按本文方法,建立我国人均

能源消耗量灰色预测模型如(10)式所示，文献[5]中所模型如(11)式所示：

$$\begin{cases}\hat{x}^{(1)}(k+1)=1789.526374e^{(0.0637\times k)}-1673.626374,\\ \hat{x}^{(0)}(k+1)=110.4380374e^{(0.0637\times k)},k=1,2,\cdots,n,\\ \hat{x}^{(0)}(1)=115.9;\end{cases}\tag{10}$$

$$\begin{cases}\hat{x}^{(1)}(k+1)=1792.315094e^{(0.0636\times k)}-1676.415094,\\ \hat{x}^{(0)}(k+1)=110.4419604e^{(0.0636\times k)},k=1,2,\cdots,n,\\ \hat{x}^{(0)}(1)=115.9.\end{cases}\tag{11}$$

表9.1　我国人均能源消耗量预测比较

年份	序号	原始数据 $x^{(0)}(k)$	本文方法		文献[5]方法	
			模拟数据 $\hat{x}^{(0)}(k)$	相对误差(%)	模拟数据 $\hat{x}^{(0)}(k)$	相对误差(%)
1998	1	115.9	115.90	0	115.90	0
1999	2	121.4	117.70	3.05	117.69	3.05
2000	3	126.4	125.44	0.76	125.42	0.77
2001	4	130.3	133.69	−2.60	133.66	−2.58
2002	5	136.9	142.49	−4.08	142.44	−4.04
2003	6	153.9	151.86	1.33	151.79	1.37
2004	7	164.2	161.85	1.43	161.76	1.49
2005（预测）	8	179.9	172.49	4.12	172.38	4.18
2006（预测）	9	194.7	183.84	5.58	183.70	5.65
2007（预测）	10	203.3	195.93	3.63	195.76	3.71

将所建模型进行平均相对误差和后验差检验，本文所提出改进模型的平均相对误差为1.46%，文献[5]所提出改进模型的平均相对误差为1.52%；计算方差比$c=S_2^2/S_1^2$，其中S_1^2为原始序列的方差，S_2^2为残差序列的方差，经计算，本文提出的方法所建立的模型的方差比为0.024，而文献[5]提出的模型的方差比为0.025。小误差概率$P=P\{|\varepsilon(k)-\bar{\varepsilon}|<0.6745S_1^2\}$，经计算，本文的小误

差概率为 1，所以本文所建模型的后验差比文献[5]的后验差还要小. 综上所述，应用本文所建立的模型具有更高模拟预测精度，优于文献[5]的方法，因此适用于预测我国人均能源消耗量.

【实例 2】 以我国航空客运量预测为例，比较本文与文献[5]的模型模拟预测精度，数据来源于《中国统计年鉴》. 以 2000～2004 年的数据建模，预测 2005，2006，2007 年的数据，结果如表 9.2 所示. 按本文方法建立我国航空客运量灰色预测模型如(12)式所示，文献[5]中所模型如(13)所示：

$$\begin{cases} \hat{x}^{(1)}(k+1) = 41583.8039e^{(0.1591\times k)} - 34861.8039, \\ \hat{x}^{(0)}(k+1) = 6116.517487e^{(0.1591\times k)}, k = 1,2,\cdots,n, \\ \hat{x}^{(0)}(1) = 6722; \end{cases} \tag{12}$$

$$\begin{cases} \hat{x}^{(1)}(k+1) = 42980.6835e^{(0.1545\times k)} - 36258.6835, \\ \hat{x}^{(0)}(k+1) = 6152.964555e^{(0.1545\times k)}, k = 1,2,\cdots,n, \\ \hat{x}^{(0)}(1) = 6722. \end{cases} \tag{13}$$

表 9.2　我国航空客运量预测

年份	序号	原始数据 $x^{(0)}(k)$	本文方法		文献[5]方法	
			模拟数据 $\hat{x}^{(0)}(k)$	相对误差 (%)	模拟数据 $\hat{x}^{(0)}(k)$	相对误差 (%)
2000	1	6722	6722.00	0.00	6722.00	0.00
2001	2	7524	7180.97	−4.56	7171.34	−4.69
2002	3	8594	8380.72	−2.48	8408.08	−2.16
2003	4	8759	9780.92	11.67	9858.09	12.55
2004	5	12123	11415.07	−5.84	11558.17	−4.66
2005（预测）	6	13827	13322.23	−3.65	13551.44	−1.99
2006（预测）	7	15967	15548.03	−2.63	15888.46	−0.50
2007（预测）	8	18576	18145.71	−2.32	18628.50	0.28

将所建模型进行平均相对误差和后验差检验，本文所提出改进模型的平均相对误差为−0.17%，文献[5]所提出改进模型的平均相对误差为−1.40%；计算方差比 $c = S_2^2/S_1^2$ ，其中 S_1^2 为原始序列的方差，S_2^2 为残差序列的方差，经计算，本文提出的方法所建立的模型的方差比为0.013，而文献[5]提出的模型的方差比为0.01；小误差概率 $P = P\{|\varepsilon(k) \quad \varepsilon| < 0.6745S_1^2\}$ ，经计算，本文所用方法的小误差概率为1，所以本文所建模型的后验差比文献[5]的后验差还要小. 综上所述，应用本文所建立模型具有比较好的模型精度，优于文献[5]提出的方法，可以用于预测我国航空客运量.

第 10 章 基于向量连分式理论的 MGM(1,n)模型

10.1 多变量灰色 MGM(1,n)模型

灰色模型是灰色系统理论的一个重要内容,自邓聚龙教授首次提出的 20 多年来,灰色模型在经济管理等众多领域得到了广泛的应用[1]. 许多学者对 GM(1,1)模型进行了广泛的研究,为了提高模型的拟合精度和预测精度,提出了一些改进措施[2~4]. 然而 GM(1,1)模型仅利用单一序列模拟和预测,没有反映多个相互影响、相互作用的变量之间协调发展和制约的情况,而 GM(1,n)模型反映了 $n-1$ 个相关因素变量序列对系统特征序列的一阶导数的影响,反映了系统特征序列的变化规律,如果相关因素变量序列的预测值没有求出,那么系统特征序列的预测值就不能求出. 在实际的社会、经济系统中,往往包含多个变量,这些变量是相互关联、共同发展的,每一变量的发展变化都不是孤立的,一个变量要受到其他变量的影响,同时也影响着其他变量. 所以,多变量灰色模型(multi variable grey model),简称 MGM(1,n)模型,从系统的角度对各变量进行统一描述. 多变量灰色 MGM(1,n)模型是 GM(1,1)模型在 n 元变量情况下的自然推广,但不是 GM(1,1)模型的简单组合,也不同于 GM(1,n)模型只建

立单个一阶微分方程，而是建立 n 个一阶微分方程.

文献[6]提出了多变量灰色 MGM(1,n)模型，通过实例对比说明了 MGM(1,n)模型和 GM(1,1)模型，文献[7,8]成功应用了 MGM(1,n)模型. 然而在实际应用中，MGM(1,n)模型存在一些预测偏差过大的情况，反映了 MGM(1,n)模型的实用性有待提高. 本文利用连分式理论建立多变量灰色 MGM(1,n)模型的背景值的计算公式，进一步提出了处理多变量数据序列的灰色模型，扩展了多变量灰色 MGM(1,n)模型的适应范围. 最后通过一个实例，建立中国国有单位和城镇集体单位的多变量灰色模型.

在实际的社会经济系统和工程系统中，一般都含有多个变量，且各变量间是相互影响、相互关联、共同发展的. 每一个变量都受到其他变量影响，同时也影响着其他变量. 多变量灰色 MGM(1,n)模型能够较好地反映系统中各变量之间相互影响、相互制约的关系. 当 $n=1$ 时，模型就退化为 GM(1,1)模型.

令 $x_i^{(0)}(k)$，$i=1,2,\cdots,n$，为第 i 个灰时间序列；$x_i^{(1)}(k)$，$i=1,2,\cdots,n$，为相应的 1－AGO，即一次累加生成序列，

$$x_i^{(1)}(k)=\sum_{j=1}^{k}x_i^{(0)}(j),k=1,2,\cdots,m. \tag{1}$$

MGM(1,n)模型的白化微分方程组形式为：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_1^{(1)}}{\mathrm{d}t}=a_{11}x_1^{(1)}+a_{12}x_2^{(2)}+\cdots+a_{1n}x_n^{(1)}+b_1,\\ \dfrac{\mathrm{d}x_2^{(1)}}{\mathrm{d}t}=a_{21}x_1^{(1)}+a_{22}x_2^{(2)}+\cdots+a_{2n}x_n^{(1)}+b_2,\\ \vdots\\ \dfrac{\mathrm{d}x_n^{(1)}}{\mathrm{d}t}=a_{n1}x_1^{(1)}+a_{n2}x_2^{(2)}+\cdots+a_{nn}x_n^{(1)}+b_n.\end{cases}$$

为了书写方便，写成矩阵形式

$$\frac{\mathrm{d}X^{(1)}}{\mathrm{d}t}=AX^{(1)}+B, \tag{2}$$

其中

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

$$X^{(1)}=(x_1^{(1)}(t),x_2^{(1)}(t),\cdots,x_n^{(1)}(t))^T,$$

$$B=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T.$$

式(2)两边左乘 e^{-At}，取 $[1,t]$ 积分，得到连续时间响应为：

$$X^{(1)}(t)=e^{A(t-1)}X^{(1)}(1)+A^{-1}(e^{A(t-1)}-I)\cdot B, \tag{3}$$

其中矩阵指数函数

$$e^{At}=I+At+\frac{A^2}{2!}t^2+\cdots=I+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A^k}{k!}t^k.$$

10.2 MGM(1,n)模型背景值的改进

1. MGM(1,n)模型的背景值

为了辨识参数 A 和 B，将式(2)离散化，以 $x_i^{(1)}(k+1)-x_i^{(1)}(k)$ 为第 i 个灰导数向量中的第 k 个分量，而以 $z_i^{(1)}(k+1)$ 为其对应的背景值. 文献[1]中 $z_i^{(1)}(k+1)=\frac{1}{2}(x_i^{(1)}(k)+x_i^{(1)}(k+1))$，于是由第 i 个白化微分方程得到第 i 个灰微分方程

$$x_i^{(0)}(k+1)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\left[\frac{x_j^{(1)}(k)+x_j^{(1)}(k+1)}{2}\right]+b_i,$$

$$i=1,2,\cdots,n,k=1,2,\cdots,m-1. \tag{4}$$

2. MGM(1,n)模型背景值的改进

定义 1[2] 设 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 为两个实数列，称形如

$$b_0+\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+\cfrac{a_3}{b_3+\cfrac{a_4}{b_4+\cdots}}}} \tag{5}$$

的分式为连分式，记作 $b_0+\overset{\infty}{\underset{n=1}{K}}(a_n/b_n)$．而式

$$b_0+\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+\ddots+\cfrac{a_n}{b_n}}} \tag{6}$$

为连分式的 n 次渐进分式.

定义 2[2]　设 $v=(v_1,v_2,\cdots,v_d)$ 是一个 d 维实向量，$|v|=(\sum_{i=1}^{d}v_i{}^2)^{1/2}$ 是向量的模，则定义广义逆如下：

$$v^{-1}=\frac{v}{|v|^2}. \tag{7}$$

定义 3[2]　设 $v=(v_1,v_2,\cdots,v_d)$是一个 d 维实向量，令

$$\varphi[x_i]=v_i,i=0,1,\cdots$$

$$\varphi[x_p,x_q]=\frac{x_q-x_p}{\varphi[x_q]-\varphi[x_p]},$$

$$\varphi[x_i,\cdots,x_j,x_k,x_l]=\frac{x_l-x_k}{\varphi[x_i,\cdots,x_j,x_l]-\varphi[x_i,\cdots,x_j,x_k]},$$

称由上式确定的 $\varphi[x_0,x_1,\cdots,x_l]$ 为关于向量集 V^m 在 $x_0,x_1,\cdots,x_l$ 处的 l 阶向量逆差商.

定理 1[2]　设

$$R_n(x)=\varphi[x_0]+\cfrac{x-x_0}{\varphi[x_0,x_1]+\cfrac{x-x_1}{\varphi[x_0,x_1,x_2]+\ddots+\varphi[x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}]+\cfrac{x-x_{n-1}}{\varphi[x_0,x_1,\cdots,x_n]}}},$$

其中 $\varphi[x_0,x_1,\cdots,x_k]\neq0,\infty,k=0,1,\cdots,n$，为关于向量集 V^m 在 $x_0,x_1,\cdots,x_k$ 处的 k 阶逆差商，则有：

$$R_n(x_i) = v_i = (x_1^{(1)}(i), x_2^{(1)}(i), \cdots, x_n^{(1)}(i)), i = 0, 1, \cdots, n.$$

将积分区间 $[a,b]$ 划分成 m 等份，步长 $h = (b-a)/m$ ，则广义梯形公式为

$$T_m(f) = h\left[\frac{1}{2}f(a) + f(a+h) + \cdots + f(a+(m-1)h) + \frac{1}{2}f(b)\right].$$

当 $m = 4$ 时，

$$zf^{(1)}(k+1) = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}x^{(1)}(k) + \cdots + x^{(1)}\left(k+\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{2}x^{(1)}(k+1)\right].$$

当 $m = 8$ 时，

$$ze^{(1)}(k+1) = \frac{1}{8}\left[\frac{1}{2}x^{(1)}(k) + \cdots + \frac{1}{2}x^{(1)}(k+1)\right].$$

组合公式为：

$$z^{(1)}(k+1) = \frac{4}{3}ze^{(1)}(k+1) - \frac{1}{3}zf^{(1)}(k+1), k = 1, 2, \cdots, m-1.$$

以 $z^{(1)}(k+1) = \frac{4}{3}ze^{(1)}(k+1) - \frac{1}{3}zf^{(1)}(k+1)$ 作为灰导数向量的背景值.

对于本文的向量广义梯形公式以及外推公式，可分别对其每一分量进行即可. 记

$$a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}, b_i)^T, i = 1, 2, \cdots, n.$$

由最小二乘法得到 a_i 的估计值 $\hat{a}_i$ 为：

$$\hat{a}_i = (\hat{a}_{i1}, \hat{a}_{i2}, \cdots, \hat{a}_{in}, \hat{b}_i)^T = (L^T L)^{-1} L^T Y, i = 1, 2, \cdots, n.$$

其中

$$L = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} * ze_1^{(1)}(2) + \frac{1}{3} * zf_1^{(1)}(2) & \cdots & 1 \\ \frac{4}{3} * ze_1^{(1)}(3) + \frac{1}{3} * zf_1^{(1)}(3) & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{4}{3} * ze_1^{(1)}(m) + \frac{1}{3} * zf_1^{(1)}(m) & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

$$Y_i = (x_i^{(0)}(2), x_i^{(0)}(3), \cdots, x_i^{(0)}(m))^T.$$

则得 A 和 B 的估计值 $\hat{A}$ 和 $\hat{B}$，即

$$\hat{A}=\begin{pmatrix}\hat{a}_{11} & \cdots & \hat{a}_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \hat{a}_{m1} & \cdots & \hat{a}_{mn}\end{pmatrix},$$

$$\hat{B}=(\hat{b}_1,\hat{b}_2,\cdots,\hat{b}_n)^T.$$

MGM(1,n)模型的计算值为：

$$\hat{X}^{(1)}(k)=e^{\hat{A}(k-1)}X^{(1)}(1)+\hat{A}^{(-1)}(e^{\hat{A}(k-1)}-I)\cdot\hat{B},k=1,2,\cdots,m.$$

$$\hat{X}^{(0)}(1)=X^{(0)}(1),$$

$$\begin{aligned}\hat{X}^{(0)}(k)&=\hat{X}^{(1)}(k)-\hat{X}^{(1)}(k-1)\\&=(I-\hat{A}^{-1})e^{\hat{A}(k-2)}(e^{\hat{A}}-I)(X^{(1)}(1)-\hat{B}),k=2,3,\cdots,m.\end{aligned}$$

10.3　实例分析

为了简便，这里选用两个序列，以 1998～2005 年中国国有单位在岗职工人数作为序列 $x_1^{(0)}$，且以 1998～2005 年中国城镇集体单位在岗职工人数为序列 $x_2^{(0)}$，建立 $x_1^{(0)}$ 和 $x_2^{(0)}$ 的 MGM(1,2)模型. 同时按照文献[8]的方法建立 MGM(1,2)模型，并且分别建立 $x_1^{(0)}$ 和 $x_2^{(0)}$ 的 GM(1,1)模型. 用以上三种模型模拟 1998～2005 年的实际值，并给出 2006 年的预测值，从而通过比较来检验模型的精度.

对序列 $x_1^{(0)}$ 作光滑性检验，得到当 $k\geqslant 3$ 时，光滑比 $\rho(k)\in(0,0.5)$，且随着 k 的增大，$\rho(k)$ 递减. 所以 $x_1^{(0)}$ 为非负准光滑序列. 又由文献[1]中的定理知，$x_1^{(0)}$ 的一次累加生成序列 $x_1^{(1)}$ 具有准指数规律. 同理 $x_2^{(0)}$ 的一次累加生成序列 $x_2^{(1)}$ 也具有准指数规律.

两序列的 MGM(1,2)模型为：

$$\frac{dx_1^{(1)}}{dt}=0.0403x_1^{(1)}-0.5741x_2^{(2)}+9431.2969,$$

$$\frac{dx_2^{(1)}}{dt}=0.0168x_1^{(1)}-0.2388x_2^{(2)}+2098.179.$$

文献[5]的 MGM(1,2)模型为：

$$\frac{dx_1^{(1)}}{dt}=0.0408x_1^{(1)}-0.5763x_2^{(2)}+9422.361,$$

$$\frac{dx_2^{(1)}}{dt}=0.017x_1^{(1)}-0.2394x_2^{(2)}+2094.1965.$$

序列 $x_1^{(0)}$ 的 GM(1,1)模型为：

$$\frac{dx_1^{(1)}}{dt}=0.0507x_1^{(1)}+8903.2867.$$

序列 $x_2^{(0)}$ 的 GM(1,1)模型为：

$$\frac{dx_2^{(1)}}{dt}=0.1328x_2^{(2)}+2001.1119.$$

记文献[8]的多变量灰色 MGM(1,n)模型为模型Ⅰ，本节所建立的多变量灰色 MGM(1,n)模型为模型Ⅱ. GM(1,1)、模型Ⅰ和模型Ⅱ的模拟平均相对误差和预测误差，见表 10.1 和表 10.2.

表 10.1 三种模型对 $x_1^{(0)}$ 的模拟值及相对误差

序号	原始序列	GM(1,1)		模型Ⅰ		模型Ⅱ	
		模拟数据	相对误差(%)	模拟数据	相对误差(%)	模拟数据	相对误差(%)
1	8809	8809	0.000	8809	0.000	8809	0.000
2	8336	8245	1.087	8370	0.408	8378	0.504
3	7878	7838	0.514	7813	0.825	7819	0.749
4	7409	7450	0.550	7356	0.715	7361	0.648
5	6924	7081	2.271	6982	0.838	6985	0.881
6	6621	6731	1.660	6674	0.800	6677	0.846
7	6438	6398	0.622	6422	0.249	6425	0.202
8	6232	6081	2.416	6215	0.273	6217	0.241
平均相对误差(%)		1.140		0.513		0.509	

注：表中的平均相对误差为其百分数的绝对值.

表 10.2　三种模型对 $x_2^{(0)}$ 的模拟值及相对误差

序号	原始序列	GM(1,1)		模型Ⅰ		模型Ⅱ	
		模拟数据	相对误差(%)	模拟数据	相对误差(%)	模拟数据	相对误差(%)
1	1900	1900	0.000	1900	0.000	1900	0.000
2	1652	1638	0.872	1658	0.363	1660	0.484
3	1447	1434	0.904	1426	1.451	1429	1.244
4	1241	1256	1.174	1238	0.242	1238	0.242
5	1071	1099	2.652	1082	1.027	1082	1.027
6	951	963	1.226	955	0.421	954	0.315
7	851	843	0.948	850	0.118	849	0.235
8	769	738	4.020	765	0.520	764	0.650
平均相对误差(%)		1.475		0.518		0.525	

注：表中的平均相对误差为其百分数的绝对值.

从表 10.1 和表 10.2 可以看出，本节提出的 MGM(1,2)模型拟合 $x_1^{(0)}$ 和 $x_2^{(0)}$ 的平均相对误差分别为 0.509%和 0.525%，文献[8]提出的 MGM(1,2)模型拟合 $x_1^{(0)}$ 和 $x_2^{(0)}$ 的平均相对误差分别为 0.513%和 0.518%，而本节 GM(1,1)模型对 $x_1^{(0)}$ 和 $x_2^{(0)}$ 拟合的平均相对误差分别为 1.14%，和 1.475%. 可见，本节提出的 MGM(1,2)模型和文献[8]提出的 MGM(1,2)模型对于两变量都有很好的拟合精度，都优于 GM(1,1)模型.

用得到的三种模型预测 2006 年的国有单位在岗职工人数和城镇集体单位在岗职工人数，预测结果见表 10.3 和表 10.4.

表 10.3　三种模型对 $x_1^{(0)}$ 的预测值及相对误差

年份	实际值	GM(1,1)		模型Ⅰ		模型Ⅱ	
		预测值	相对误差(%)	预测值	相对误差(%)	预测值	相对误差(%)
2006	6170	5781	6.312	6045	2.026	6046	2.010

表 10.4　三种模型对 $x_2^{(0)}$ 的预测值及相对误差

年份	实际值	GM(1,1)		模型Ⅰ		模型Ⅱ	
		预测值	相对误差(%)	预测值	相对误差(%)	预测值	相对误差(%)
2006	726	646	10.98	694	4.408	692	4.683

从表 10.3 和 10.4 可以看出，本节提出的 MGM(1,2)模型预测 $x_1^{(0)}$ 和 $x_2^{(0)}$ 的相对误差为分别 2.01%和 4.683%，文献[8]提出的 MGM(1,2)模型预测 $x_1^{(0)}$ 和 $x_2^{(0)}$ 的相对误差分别为 2.026%和 4.408%，而本节 GM(1,1)模型对 $x_1^{(0)}$ 和 $x_2^{(0)}$ 预测的相对误差分别为 6.312%和 10.98%. 本节提出的 MGM(1,2)模型和文献[8]提出的 MGM(1,2)模型预测精度都比较高. 因此，本节提出的 MGM(1,2)模型比较好地反映了国有单位在岗职工人数和城镇集体单位在岗职工人数之间相互制约、共同发展的关系.

第 11 章 非等间距 GM(1,1)模型时间响应函数的优化

11.1 非等间距 GM(1,1)模型的建模机理

灰色系统理论自邓聚龙教授创立以来，在许多领域得到了广泛应用，基于贫信息的灰色预测成功地解决了许多信息不完全的预测问题[1]. 但是，灰色系统模型大都建立在等间距序列的基础上，而在现实中得到的原始数据可能是非等间距序列. 所以，建立非等间距序列的 GM(1,1)模型具有现实意义. 许多学者对此进行了深入研究，文献[10～16]阐述了几种非等间距序列 GM(1,1)模型的建模机理，并在具体的领域得到了成功应用. 但是所建模型的精度较低，而且还没有完全脱离等间距序列的建模思想，应用范围受到一定的限制.

基于上述局限性，本章将通过研究非等间距原始序列的特点和 GM(1,1)模型的建模机理，以原始序列一次累加序列的观测值与模拟值的残差平方和最小为条件，构建非等间距 GM(1,1)模型的时间响应函数的优化模型，并将该模型应用于文献[11]中钛合金疲劳强度随温度变化关系的研究，结果表明，该模

型在模拟精度和预测精度方面都取得了较好的效果.

定义 11.1[10] 设原始序列 $X^{(0)}=(x^{(0)}(k_1),x^{(0)}(k_2),\cdots,x^{(0)}(k_n))$，相邻分量之间的间距为

$$\Delta k_i=k_i-k_{i-1},i=2,3,\cdots,n. \tag{1}$$

若 Δk_i 为常数，则称序列 $X^{(0)}$ 为等间距序列，若 Δk_i 不为常数，则称 $X^{(0)}$ 为非等间距序列.

在实际应用中存在大量的非等间距序列的拟合和预测问题，特别是在工程技术领域，Δk_i 不为常数. 为了综合考虑序列的间距 Δk_i，在对原始序列进行一次累加时，以序列的间距作为乘子，建立非等间距 GM(1,1)模型.

定义 11.2 设序列 $X^{(1)}=(x^{(1)}(k_1),x^{(1)}(k_2),\cdots,x^{(1)}(k_n))$，若其中每个分量都满足

$$x^{(1)}(k_i)=\sum_{j=1}^{i}x^{(0)}(k_j)\Delta k_j,i=1,2,\cdots,n, \tag{2}$$

规定 $x^{(1)}(k_1)=x^{(0)}(k_1)$，则称 $X^{(1)}$ 为 $X^{(0)}$ 的一次累加生成序列.

定理 11.1[11] 设 $X^{(0)}$ 为非负光滑序列，即

$$X^{(0)}=(x^{(0)}(k_1),x^{(0)}(k_2),\cdots,x^{(0)}(k_n)),$$

则称

$$X^{(1)}=(x^{(1)}(k_1),x^{(1)}(k_2),\cdots,x^{(1)}(k_n))$$

为 $X^{(0)}$ 的一次累加生成序列时，对 $X^{(1)}$ 建立的白化微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x^{(1)}(t)}{\mathrm{d}t}+ax^{(1)}(t)=b \tag{3}$$

的灰色微分方程为：

$$x^{(0)}(k_{i+1})\Delta k_{i+1}+az^{(1)}(k_{i+1})-b\Delta k_{i+1}, \tag{4}$$

其中 $z^{(1)}(k_{i+1})$ 为 $x^{(1)}(t)$ 在 $[k_i,k_{i+1}]$ 上的背景值. 灰色微分方程的最小二乘参数估计为：

$$\hat{a}=(\hat{a},\hat{b})^T=(B^TB)^{-1}B^TY, \tag{5}$$

其中

$$Y=\begin{bmatrix}x^{(0)}(k_2)\Delta k_2\\x^{(0)}(k_3)\Delta k_3\\\vdots\\x^{(0)}(k_n)\Delta k_n\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}-z^{(1)}(k_2)&\Delta k_2\\-z^{(1)}(k_3)&\Delta k_3\\\vdots&\vdots\\-z^{(1)}(k_n)&\Delta k_n\end{bmatrix}.$$

11.2　非等间距GM(1,1)模型时间响应函数的优化

文献[12,13]以序列中第一个分量作为非等间距GM(1,1)模型的初始条件,没有对白化微分方程的时间响应函数进行优化,不能保证模拟序列和原始序列的最优拟合,造成模拟精度和预测精度都比较低.为了改进以上问题,笔者运用最小二乘法来优化非等间距GM(1,1)模型的时间响应函数.

定理11.2　设Y,B,$\hat{a}$如定理11.1所述,$\hat{a}=(\hat{a},\hat{b})^T=(B^TB)^{-1}B^TY$,则

(1)白化微分方程$\frac{dx^{(1)}(t)}{dt}+ax^{(1)}(t)=b$的时间响应函数为

$$x^{(1)}(t)=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x^{(1)}(t)-\frac{b}{a}\right)e^{-at}}{\sum_{i=1}^{n}e^{-2at}}e^{-at}+\frac{b}{a};\tag{6}$$

(2)非等间距GM(1,1)模型$x^{(0)}(k_{i+1})\Delta k_{i+1}+az^{(1)}(k_{i+1})=b\Delta k_{i+1}$的时间响应序列为

$$x^{(1)}(k_{i+1})=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x^{(1)}(k_i)-\frac{b}{a}\right)e^{-ak_i}}{\sum_{i=1}^{n}e^{-2ak_i}}e^{-ak_{i+1}}+\frac{b}{a};\tag{7}$$

(3)还原值

$$\hat{x}^{(0)}(k_{i+1})=\frac{\hat{x}^{(1)}(k_{i+1})-\hat{x}^{(1)}(k_i)}{\Delta k_{i+1}}$$

$$=\frac{(1-e^{a\Delta k_{i+1}})}{\Delta k_{i+1}}\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x^{(1)}(k_i)-\frac{b}{a}\right)e^{-ak_i}}{\sum_{i=1}^{n}e^{-2ak_i}}\right]e^{-ak_{i+1}}. \tag{8}$$

证明:(1)白化微分方程 $\frac{dx^{(1)}(t)}{dt}+ax^{(1)}(t)=b$ 的通解为:

$$x^{(1)}(t)=ce^{-at}+\frac{b}{a}.$$

为了求出 c,构造一次累加生成序列的残差平方和函数 $RSS(c)$:

$$RSS(c)=\sum_{t=1}^{n}(x^{(1)}(t)-\hat{x}^{(1)}(t))^2$$

$$=\sum_{t=1}^{n}\left(x^{(1)}(t)-ce^{-at}-\frac{b}{a}\right)^2.$$

这是一个二次函数,一定存在极小值.令 $\frac{dRSS(c)}{dc}=0$,求出唯一驻点,得:

$$c=\frac{\sum_{t=1}^{n}\left(x^{(1)}(t)-\frac{b}{a}\right)e^{-at}}{\sum_{t=1}^{n}e^{-2at}}. \tag{9}$$

根据实际情况,知函数 $RSS(c)$ 在此驻点取得最小值.

(2)令 $t=k_i$,由(9)式可得:

$$x^{(1)}(k_{i+1})=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x^{(1)}(k_i)-\frac{b}{a}\right)e^{-ak_i}}{\sum_{i=1}^{n}e^{-2ak_i}}e^{-ak_{i+1}}+\frac{b}{a}.$$

(3)由累减还原可得.

定理 11.3 设原始序列 $X^{(0)}=(x^{(0)}(k_1),x^{(0)}(k_2),\cdots,x^{(0)}(k_n))$,非等间距

GM(1,1)模型的时间响应序列累减还原值为

$$\hat{x}^{(0)}(k_{i+1})=\frac{\hat{x}^{(1)}(k_{i+1})-\hat{x}^{(1)}(k_i)}{\Delta k_{i+1}},$$

有

(1)当 $k_i\leqslant n$ 时，$\hat{x}^{(0)}(k_i)$ 为模型的模拟值；

(2)当 $k_i>n$ 时，$\hat{x}^{(0)}(k_i)$ 为模型的预测值.

11.3 实例分析

为了便于比较，采用文献[11]中的工程技术实例，该序列是 P. G 福雷斯研究钛合金疲劳强度随温度变化的实验结果，这是一个非等间距序列. 笔者对原始数据序列按照本文的方法和文献[16]的方法同时建模，然后对比分析.

本文所建立的非等间距 GM(1,1)模型简记为优化模型：

$$\hat{x}^{(1)}(k_{i+1})=-6.32371\times10^5e^{-0.000985k_{i+1}}+5.73646\times10^5,$$

其中 $i=1,2,\cdots,8$.

文献[11]的模型为：

$$\hat{x}^{(1)}(k_{i+1})=-5.77025\times10^5e^{-0.00098(k_{i+1}-100)}+5.77585\times10^5,$$

其中 $i=1,2,\cdots,8$.

文献[16]的模型为：

$$\hat{x}^{(1)}(k_{i+1})=-5.8614\times10^5e^{-0.00096025(k_{i+1}-100)}+5.867\times10^5,$$

其中 $i=1,2,\cdots,8$.

三种模型的模拟值及其相对误差见表 11.1.

表 11.1　三种模型的拟合值及其相对误差

T/C	σ_{-1}	序号	文献[11]的模型		文献[16]的模型		优化模型	
			模拟值	相对误差(%)	模拟值	相对误差(%)	模拟值	相对误差(%)
100	560	k_1	560	0.00	560.00	0.00	560.00	0.00
130	557.54	k_2	563.04	0.99	554.81	0.49	557.35	0.03
170	536.1	k_3	537.06	0.18	536.49	0.07	537.36	0.24
210	516.1	k_4	512.31	0.73	516.27	0.03	516.60	0.10
240	505.6	k_5	494.28	2.24	499.20	1.27	499.08	1.29
270	480.1	k_6	481.20	1.01	485.02	1.03	484.55	0.93
310	467.4	k_7	468.26	0.18	469.00	0.34	468.14	0.16
340	453.8	k_8	457.30	0.77	453.49	0.07	452.27	0.34
平均相对误差(%)				0.76		0.41		0.39

注：表中平均相对误差为其绝对值.

从表 11.1 可以看出，本文提出的优化模型模拟精度(模拟准确度)为 0.39%，文献[11]和[16]的模拟精度分别为 0.76% 和 0.41%，显然文献[16]的模拟精度优于文献[11]的模拟精度，本文所建模型的模拟精度优于文献[16].

三种模型的预测值及其相对误差见表 11.2.

表 11.2　三种模型的预测值及其相对误差

T/C	σ_{-1}	序号	文献[11]的模型		文献[16]的模型		优化模型	
			模拟值	相对误差(%)	模拟值	相对误差(%)	模拟值	相对误差(%)
380	436.4	k_9	448.17	2.70	438.51	−0.48	436.95	−0.13

由表 11.2 可知，本文提出的优化模型的预测精度也高于文献[11,16]. 可见，文中的优化模型较好地反映了钛合金疲劳强度和温度的变化关系.

第 12 章 GM(1,1)模型的病态问题研究

12.1 矩阵条件数

灰色系统是根据关联度、灰数、灰导数等一系列数学方法建立起来的连续性的微分方程,它能利用少量的数据进行建模.目前,被广泛应用于工业、农业、经济等领域.在实际应用过程中,数据矩阵中的元素一般是观测得到的,所以不可避免地带有误差.这对于模型的参数辨识有一定的影响.

定理 12.1[1] 设 $A \in C^{n\times n}$,$\delta A \in C^{n\times n}$,$\delta b \in C^{n}$,若对 $C^{n\times n}$ 上的某一矩阵范数 $\|\cdot\|$ 有 $\|A^{-1}\| \cdot \|\delta A\| < 1$,则非齐次线性方程组 $Ax = b$ 与 $(A+\delta A)(x+\delta x) = b+\delta b$ 的解满足

$$\frac{\|\delta x\|_v}{\|x\|_v} \leqslant \frac{\|A\| \times \|A^{-1}\|}{1-\|A\| \times \|A^{-1}\| \times \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}\left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}+\frac{\|\delta b\|_v}{\|b\|_v}\right).$$

其中 $\|\cdot\|_v$ 是 C^n 上与矩阵范数 $\|\cdot\|$ 相容的范数.

由以上不等式可以看出,数据的误差对线性方程组解的影响与 $\|A\| \times \|A^{-1}\|$ 的大小有关.因此,可以 $\|A\| \times \|A^{-1}\|$ 作为影响线性方程组解的大小的一种度量.

定义 12.1[1] 设 $A \in C^{n\times n}$，$\|\cdot\|$ 是 $C^{n\times n}$ 上的矩阵范数，称 $K(A)=\|A\|\times\|A^{-1}\|$ 为矩阵 A 的条件数.

当 A 为正规矩阵时，有 $K(A)=\dfrac{|\lambda_1|}{|\lambda_n|}$，其中 λ_1，λ_n 分别是 A 的模最大和最小特征值. 由于 $A\in C^{n\times n}$ 的所有矩阵范数都是等价的，为了方便，我们取 2 范数.

实践中，一般认为：若 $1<K(A)<10$，则 A 为良态的；若 $10\leqslant K(A)<100$，则 A 为轻度病态的；若 $100\leqslant K(A)<1000$，则 A 为较强病态的；若 $1000\leqslant K(A)$，则 A 为严重病态的（见文献[1]）.

12.2 GM(1,1)模型的病态分析

定义 12.2[1] 设系统行为数据为非负光滑序列 $X^{(0)}=(x^{(0)}(1),\cdots,x^{(0)}(n))$，$X^{(1)}$ 为 $X^{(0)}$ 的 1－AGO 序列，$Z^{(1)}$ 为 $X^{(1)}$ 紧邻均值生成序列，称 $x^{(0)}(k)+az^{(1)}(k)=b$ 为灰色微分方程，也被称为 GM(1,1)模型的定义式.

定理 **12.2**[1] 若 $\tilde{a}=(a,b)^T$ 为 GM(1,1)模型参数，且

$$Y=\begin{pmatrix}x^{(0)}(2)\\ \vdots\\ x^{(0)}(n)\end{pmatrix},B^TB=\begin{pmatrix}\sum\limits_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]^2 & -\sum\limits_{k=2}^{n}z^{(1)}(k)\\ -\sum\limits_{k=2}^{n}z^{(1)}(k) & n-1\end{pmatrix},$$

则灰色微分方程 $x^{(0)}(k)+az^{(1)}(k)=b$ 的最小二乘估计参数序列为

$$\tilde{a}=(a,b)^T=(B^TB)^{-1}BY,$$

其中系数矩阵

$$B^TB=\begin{pmatrix}\sum\limits_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]^2 & -\sum\limits_{k=2}^{n}z^{(1)}(k)\\ -\sum\limits_{k=2}^{n}z^{(1)}(k) & n-1\end{pmatrix},$$

其伴随矩阵为

$$(B^TB)^* = \begin{bmatrix} n-1 & \sum_{k=2}^{n} z^{(1)}(k) \\ \sum_{k=2}^{n} z^{(1)}(k) & \sum_{k=2}^{n} [z^{(1)}(k)]^2 \end{bmatrix}.$$

由定义 12.1 知:系数矩阵 B^TB 的 2 范数的条件数为

$$K(B^TB) = \| B^TB \|_2 \times \| (B^TB)^{-1} \|_2 = \frac{\| B^TB \|_2 \times \| (B^TB)^* \|_2}{|B^TB|} = \frac{|\lambda_1| \times |\lambda_1^*|}{|B^TB|},$$

其中,λ_1 为 B^TB 模最大的特征值,λ_1^* 为 $(B^TB)^*$ 模最大的特征值.

定理 12.3[1]　设 $A \in C^{n\times n}$,则 A 的任一特征值满足

$$|\lambda| \leqslant n \times \max_{i,j} |a_{i,j}|.$$

由定理 12.3 得,

$$K(B^TB) = \frac{|\lambda_1| \times |\lambda_1^*|}{|B^TB|} \leqslant \frac{4\max|a_{ij}| \times \max|a_{ij}^*|}{|B^TB|}.$$

显然,由 B^TB 与 $(B^TB)^*$ 的表达式知,矩阵 B^TB 与 $(B^TB)^*$ 的模最大值无非就是

$$\sum_{k=2}^{n} [z^{(1)}(k)]^2, n-1, \left| \sum_{k=2}^{n} z^{(1)}(k) \right|$$

三者之一.

引理　若 $a=(a_1,\cdots,a_n)$ 和 $b=(b_1,\cdots,b_n)$ 是实数序列,则

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right).$$

等号成立的充要条件是序列 a 与 b 线性相关.

由引理知

$$\left(\left| \sum_{k=2}^{n} z^{(1)}(k) \right|\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=2}^{n} [z^{(1)}(k)]^2\right) \times (n-1).$$

下面我们分三种情形来分析矩阵 B^TB 的条件数.

(1)对于所有的k,有$z^{(1)}(k)<1$,$n-1$为矩阵B^TB与$(B^TB)^*$中的最大值元素,则

$$K(B^TB)\leqslant\frac{4\max|a_{ij}|\times\max|a_{ij}^*|}{|B^TB|}$$

$$=\frac{4(n-1)^2}{(n-1)\sum\limits_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]^2-\left(\sum\limits_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]\right)^2}$$

$$=\frac{4(n-1)}{\sum\limits_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]^2-\frac{\left(\sum\limits_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]\right)^2}{n-1}}.$$

当$\sum\limits_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]^2-\frac{\left(\sum\limits_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]\right)^2}{n-1}\geqslant 1$时,

$$K(B^TB)\leqslant 4(n-1).$$

由于灰色系统讨论的是小样本问题,$n\leqslant 10$,则$K(B^TB)\leqslant 40<100$. 此时显然GM(1,1)模型不存在大的病态问题.

当$0<\sum\limits_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]^2-\frac{\left(\sum\limits_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]\right)^2}{n-1}<1$时,条件数的大小取决于

$$\sum_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]^2-\frac{\left(\sum\limits_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]\right)^2}{n-1}$$

接近于0的程度.

当$\sum\limits_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]^2-\frac{\left(\sum\limits_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]\right)^2}{n-1}\to 0$时,则

$$\left(\sum_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]\right)^2\to\left(\sum_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]^2\right)(n-1).$$

此时,$\{z^{(1)}(k)\}$近似为常数序列,则$\{x^{(1)}(k)\}$也近似为常数序列,故$\{x^{(0)}(k)\}$近似为首项不为0,其他各项全为0的常数序列,对于此序列建模没有实际

意义.

(2)对于所有的k,有$z^{(1)}(k)>1$, $\sum_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]^2$为矩阵$B^TB$与$(B^TB)^*$中的最大值元素,则

$$K(B^TB)\leqslant\frac{4\max|a_{ij}|\times\max|a_{ij}^*|}{|B^TB|}$$

$$=\frac{4\left\{\sum_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]^2\right\}^2}{(n-1)\sum_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]^2-\left(\sum_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]\right)^2}$$

$$=\frac{4\sum_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]^2}{(n-1)-\dfrac{\left(\sum_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]\right)^2}{\sum_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]^2}}$$

当

$$0<\frac{\left(\sum_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]\right)^2}{\sum_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]^2}\leqslant n-2,(n-1)-\frac{\left(\sum_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]\right)^2}{\sum_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]^2}\geqslant 1$$

时,

$$K(B^TB)\leqslant 4\sum_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]^2\leqslant 4(n-1)\max_{2\leqslant k\leqslant n}[z^{(1)}(k)]^2.$$

尽管灰色系统研究的是小样本问题,比如$n=5$,但只要$z^{(1)}(k)=10$,则

$$K(B^TB)\leqslant 4\sum_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]^2\leqslant 4\times 4\times 10^2=1600,$$

而矩阵的条件数$K(B^TB)\geqslant 1000$,则矩阵B^TB就是最严重的病态矩阵.实际问题中$z^{(1)}(k)$远远大于10,n可以取10,则病态问题肯定相当严重,文献[1]中的算例也表明这一点.

同样,当 $n-2<\frac{\left(\sum_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]\right)^2}{\sum_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]^2}\leqslant n-1$ 时,条件数同时取决于 $4\sum_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]^2$ 的大小与 $\frac{\left(\sum_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]\right)^2}{\sum_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]^2}$ 接近于 $n-1$ 的程度,比如当

$$\frac{\left(\sum_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]\right)^2}{\sum_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]^2}-(n-1)=0.8,$$

此时,$\frac{\left(\sum_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]\right)^2}{\sum_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]^2}$ 接近于 $n-1$ 的程度还是相当远,但

$$K(B^TB)\leqslant 5\sum_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]^2,$$

同样由于原始数据较大,1 次累积和数据更大,比如 $z^{(1)}(k)=100,n=5$,从而

$$K(B^TB)\leqslant 5\sum_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]^2=5\times 4\times 100^2=2\times 10^5\gg 1000,$$

文献[1]中的算例显示矩阵 B^TB 的的条件数高达 10^7.

当然,若 $4\sum_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]^2<50$ 或 $4\sum_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]^2<100$ 时,则引起病态问题的原因就是 $\frac{\left(\sum_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]\right)^2}{\sum_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]^2}$ 接近于 $n-1$ 的程度. 当

$$\frac{\left(\sum_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]\right)^2}{\sum_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]^2}\to(n-1),$$

此时,$\{z^{(1)}(k)\}$ 近似为常数序列,即 $\{x^{(1)}(k)\}$ 也近似为常数序列,故 $\{x^{(0)}(k)\}$

近似为首项不为 0,其他各项全为 0 的常数序列,对于此序列建模没有实际意义.

(3)当 $\left|\sum_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]\right|$ 最大,即

$$\left|\sum_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]\right| > \sum_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]^2, \left|\sum_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]\right| > n-1 > 1,$$

则

$$\left(\sum_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]\right)^2 = \left|\sum_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]\right| \times \left|\sum_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]\right| > \left(\sum_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]^2\right)(n-1),$$

由引理知不可能. 即 $\left|\sum_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]\right|$ 不可能最大.

总之,三个数 $\left(\sum_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]\right)^2$, $\left|\sum_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]\right|$, $n-1$ 中的最大值只能是 $\left(\sum_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]\right)^2$, $n-1$. 则针对序列 $\{z^{(1)}(k)\}$ 中,有的元素大于 1,有的元素小于 1,也只能是 $\left(\sum_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]\right)^2$ 最大或 $n-1$ 最大,可分别归于(1)、(2)进行讨论.

综上所述,引起矩阵条件数变大的原因只有两个,原始数据较大或病态数据(即近似为首项不为 0,其他项为 0 的常数序列). 对于后一类问题,没有现实意义,不必深究. 对于原始数据较大,可选择数乘变换,比如对非负原始数据

$$X^{(0)} = (x^{(0)}(1),\cdots,x^{(0)}(n)),$$

及其一次累积数据

$$X^{(1)} = (x^{(1)}(1),\cdots,x^{(1)}(n)),$$

紧邻均值生成序列

$$Z^{(1)} = (z^{(1)}(2),\cdots z^{(1)}(n)),$$

显然有

$$x^{(1)}(1) \leqslant \cdots \leqslant x^{(1)}(n), z^{(1)}(2) \leqslant \cdots \leqslant z^{(1)}(n).$$

对原始数据 $x^{(0)}(k)$ 乘以一个数 $\rho < \frac{1}{z^{(1)}(n)}$，则得新的数据

$$y^{(1)}(k) = \rho \times z^{(1)}(k) < \rho \times z^{(1)}(n) < 1, k = 2, \cdots, n.$$

故可转入本文中的(1)来解决. 从而对于新的数据 $y^{(1)}(k)$ 建模应该不会有太大的病态问题. 对得到的结果进行反变换，文献[1]已详细讨论.

若 $1 < K(A) < 10$，则 A 为良态的. 若 $10 \leqslant K(A) < 100$，则 A 为轻度病态的. 若 $100 \leqslant K(A) < 1000$，则 A 为较强病态的. 若 $1000 \leqslant K(A)$，则 A 为严重病态的. 据此论述，最后给出一个如何解决灰色 GM(1,1) 建模中病态问题的具体方案：

(1)若 $n-1$ 为矩阵 B^TB 与 $(B^TB)^*$ 中的最大值元素，可直接对原始数据建模.

(2)若 $\sum_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]^2$ 为矩阵 B^TB 与 $(B^TB)^*$ 中的最大值元素，则

(Ⅰ)当 $0 < \frac{\left(\sum_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]\right)^2}{\sum_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]^2} \leqslant n-2$ 时，

若 $\max\limits_{2 \leqslant k \leqslant n}[z^{(1)}(k)] \leqslant \sqrt{\frac{10}{4(n-1)}}$ 时，$1 < K(BB^*) < 10$，则矩阵 BB^* 为良态的. 可放心利用 GM(1,1)建模；

若 $\max\limits_{2 \leqslant k \leqslant n}[z^{(1)}(k)] \leqslant \sqrt{\frac{100}{4(n-1)}}$ 时，$K(BB^*) < 100$，则矩阵 BB^* 为良态的或轻度病态的，可以利用 GM(1,1)建模；

若 $\max\limits_{2 \leqslant k \leqslant n}[z^{(1)}(k)] \leqslant \sqrt{\frac{1000}{4(n-1)}}$ 时，$K(BB^*) < 1000$，则矩阵 BB^* 为较强病态的，可以谨慎利用 GM(1,1)建模，最好对原始数据先施行数乘变换，然后建模；

若 $\max\limits_{2 \leqslant k \leqslant n}[z^{(1)}(k)] \geqslant \sqrt{\frac{1000}{4(n-1)}}$ 时，$K(BB^*)$ 有可能大于 1000，则矩阵 BB^* 为严重病态的，建议对原始数据先施行数乘变换，然后建模；

(Ⅱ)当 $n-2<\dfrac{\left(\sum\limits_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]\right)^2}{\sum\limits_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]^2}\leqslant n-1$ 时,比如当

$$0\leqslant(n-1)-\frac{\left(\sum\limits_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]\right)^2}{\sum\limits_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]^2}=\alpha\leqslant 1,$$

且 α 不太小时,比如 $\alpha\geqslant 0.5$ 时,可分别根据

$$\max_{2\leqslant k\leqslant n}[z^{(1)}(k)]\leqslant\sqrt{\frac{10}{4\alpha(n-1)}},$$

$$\max_{2\leqslant k\leqslant n}[z^{(1)}(k)]\leqslant\sqrt{\frac{100}{4\alpha(n-1)}},$$

$$\max_{2\leqslant k\leqslant n}[z^{(1)}(k)]\leqslant\sqrt{\frac{1000}{4\alpha(n-1)}},$$

$$\max_{2\leqslant k\leqslant n}[z^{(1)}(k)]\geqslant\sqrt{\frac{1000}{4\alpha(n-1)}},$$

采用类似于(Ⅰ)中的方法进行建模.

数乘变换中的 ρ 选择,只要 $\rho<\dfrac{1}{z^{(1)}(n)}$ 即可.

参考文献

[1] 刘思峰，党耀国，方志耕等. 灰色系统理论及其应用[M]. 北京：科学出版社，2004.

[2] 檀结庆等. 连分式理论及其应用[M]. 北京：科学出版社，2007.

[3] 黄巍松，吉培荣，胡翔勇. 灰色 GM(1,1)模型误差特性的实验研究[J]. 武汉水利电力学报，2000，1(22)：69～72.

[4] 谭冠军. 灰色 GM(1,1)模型的背景值构造方法和应用[J]. 系统工程理论与实践，2000，20(4)：98～103.

[5] 李俊峰，戴文战. 基于插值和 Newton-cores 公式的 GM(1,1)模型的背景值构造新方法和应用[J]. 系统工程理论与实践，2004，24(10)：122～126.

[6] 翟军，盛建明，冯英浚. MGM (1, n)灰色模型及应用[J]. 系统工程理论与实践，1997，(5)：109～113.

[7] 李小霞，同小军，陈锦云. 多因子灰色 $MGM^p(1,n)$优化模型[J]. 系统工程理论与实践，2003，4(4)：47～51.

[8] 石世荣. 多变量灰色模型 MGM(1,n)在变形中的应用[J]. 测绘通报，1998，(10)：9～18.

[9] 王五祥，刘冰. 基于 MGM(1,n)的 *R&D* 投入预测分析[J]. 科学学研究，2005，12(23)：93～96.

[10] 王丰效，多变量非等间距 MGM(1,m)模型及其应用[J]. 系统工程与电子技术，2007，3(29)：388～390.

[11] 罗佑新，周继荣. 非等间距 GM(1,1)模型及其在疲劳实验数据处理和疲劳实验在线检测中的应用[J]. 机械强度，1996，18(3)：60～63.

[12] 刘斌，刘思峰，翟振杰，党耀国. GM(1,1)模型时间响应函数的最优化[J]. 中国管理科学，2003，11(4)：54～57.

[13] 王钟羡，吴春笃，史雪荣. 非等间距序列的灰色模型[J]. 数学的实践与认识，2003，33(10)：16～20.

[14] 戴文战，李俊峰. 非等间距 GM(1,1)模型建模研究[J]. 系统工程理论与实践，2005，9(9)：89～93.

[15] 史雪荣，王作雷，张正娣. 变参数非等间距 GM(1,1)模型及应用[J]. 数学的实践与认识，2006，36(6)：216～210.

[16] 李翠凤，戴文战. 非等间距 GM(1,1)模型背景值构造方法及应用[J]. 清华大学学报(自然科学版)，2007，47(22)：1729～1732.

[17] 刘思峰. 冲击扰动系统预测陷阱与缓冲算子[J]. 华中理工大学学报，1997，25(1)：25～27.

[18] 谢乃明，刘思峰，方志耕. 灰色系统理论及其应用(第四版)[M]，北京：科学出版社，2008.

[19] 党耀国，刘思峰，刘斌，唐学文. 关于弱化缓冲算子的研究[J]. 中国管理科学，2004，12(2)：108～111.

[20] 党耀国，刘斌，关叶青. 关于强化缓冲算子的研究[J]. 控制与决策，2005，20(12)：1332～1336.

[21] 党耀国，刘思峰，米传民. 强化缓冲算子性质的研究[J]. 控制与决策，2007，22(7)：730～734.

[22] 关叶青，刘思峰. 基于不动点的强化缓冲算子序列及其应用[J]. 控制与决策，2007，22(10)：1189～1192.

[23] 刘思峰. 缓冲算子及其应用[J]. 灰色系统理论与实践,1992,2(1):45～50.

[24] 邓聚龙. 灰理论基础[M]. 武汉,华中科技大学出版社,2002.

[25] 上海统计局. 上海统计年鉴[M]. 上海:上海统计出版社,2008.

[26] 崔立志等. 基于向量连分式的 MGM(1,n)模型[J]. 系统工程,2008,26(10):47～51.

[27] 王正新,党耀国,刘思峰. 变权缓冲算子及其作用强度研究[J]. 控制与决策,2009,24(8):1218～1222.

[28] 崔杰,党耀国. 一类新的强化缓冲算子的构造及其应用[J]. 控制与决策,2009,23(7):741～750.

[29] 关叶青,刘思峰. 强化缓冲算子序列与 m 阶算子作用研究[J]. 云南师范大学,2007,27(1):32～35.

[30] 谢乃明,刘思峰. 一种新的弱化缓冲算子[J]. 中国管理科学,2003,11(增):46～48.

[31] 关叶青,刘思峰. 关于弱化缓冲算子序列的研究[J]. 中国管理科学,2007,15(4):89～92.

[32] 刘思峰,邓聚龙. GM(1,1)模型适用范围 [J]. 系统工程理论与实践,2000,5(21):121～124.

[33] 宋中民,邓聚龙. 反向累加生成及 GOM(1,1)灰色模型[J]. 系统工程,2001,19(1):66～69.

[34] 吴正朋,刘思峰,米传民,王建玲. 再论离散 GM(1,1)模型的病态问题[J]. 系统工程理论与实践(待发表).

[35] 吴正朋,刘思峰,崔立志,米传民,王建玲. 基于单调函数的弱化缓冲算子研究[J]. 控制与决策, 2009,24(7):1055～1058.

[36] 吴正朋,刘思峰,崔立志. 一类基于不动点的新弱化缓冲算子的构造与应用[J]. 控制与决策, 2009,24(12):1805～1809.

[37] 吴正朋,刘思峰,米传民,崔立志,张可,王建玲. 基于单调函数的若干实用

弱化缓冲算子的构造与应用[J]. 系统工程，2009,27(5):124～126.

[38] 吴正朋，刘思峰，米传民，王建玲，崔立志. 基于反向累积法的弱化缓冲算子研究[J]. 中国管理科学，2009,17(3):136～141.

[39] 崔立志，刘思峰，吴正朋. 关于新弱化缓冲算子的研究与应用[J]. 控制与决策，2009,24(8):1252～1256.

[40] 米传民，刘思峰，吴正朋，王建玲. 基于反向累积法的强化缓冲算子研究[J]. 控制与决策，2009,24(3):352～355.

[41] 崔立志，刘思峰，吴正朋. 基于向量连分式的 MGM(1,n)模型[J]. 系统工程，2008,26(10):47～51.

[42] 崔杰，党耀国. 一类新的弱化缓冲算子的构造及其应用[J]. 控制与决策，2008,23(7):741～750.

[43] 谢乃明，刘思峰. 强化缓冲算子的性质与若干实用强化算子的构造[J]. 统计与决策，2006(4):9～10.

[44] Wu Zhengpeng, Liu Sifeng, Mi Chuanmin, Zhang Ke, Wang Jianling. Study on the sequence of weakening buffer operator based on old weakening buffer operator[J]. The Journal of grey system, 2008, 3:229～234.

[45] Wu Zhengpeng, Liu Sifeng, Mi Chuanmin, Zhang Ke, Wang Jianling. Study on the strengthening sequence of the strictly monotonic function [J]. The Journal of grey system, 2008, 3:265～272.

[46] Wu Zhengpeng, Liu Sifeng, Mi Chuanmin, Wang Jianling. Study on the sequence of the strengthening buffer operator based on the strictly monotonic function[J]. Journal of grey system, 2008, 6:113～118.

[47] Wu Zhengpeng, Liu Sifeng, Mi Chuanmin, Wang Jianling. The weakening buffer operator based on the old buffer operator[J]. SMC 2009.

[48] Wu Zhengpeng, Liu Sifeng, Mi Chuanming, Wang Jianling. Some new results on the weakening buffer operators[J]. GSIS 2009.

[49] Liu Sifeng. The three axioms of buffer operator and their application, The Journal of Grey System[J]. 1991, 3(1): 39~48.

[50] Liu Sifeng, Lin Y. An introduction to grey systems: Foundations, methodology and applications[M]. Slippry Rock: IIGSS Academic Publisher, 1998.